1. GIỚI HẠN DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I – GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Định nghĩa 2

Ta nói dãy số (v_n) có giới hạn là a (hay v_n dần tới a) khi $n \to +\infty$, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - a) = 0$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ hay $v_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

2. Một vài giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ với k nguyên dương;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$;

c) Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c = c$.

Chú ý: Từ nay về sau thay cho $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ ta viết tắt là $\lim u_n = a$.

II – ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

Định lí 1

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(u_n.v_n) = a.b$
- $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$).

b) Nếu $\begin{cases} \lim u_n = a \\ u_n \geq 0, \forall n \end{cases}$ thì $\begin{cases} \lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a} \\ a \geq 0 \end{cases}$.

III – TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q, với $|q|<1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{u_1}{1-q} \quad (|q|<1).$$

IV – GIỚI HẠN VÔ CỰC

1. Định nghĩa

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

- Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

Nhận xét: $u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = -\infty$.

2. Một vài giới hạn đặc biệt

Ta thừa nhận các kết quả sau

a) $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương;

b) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q>1$.

3. Định lí 2

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

b) Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0, \forall n > 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n.v_n = +\infty$.

B. CÁC DANG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Vấn đề 1. Tìm giới hạn bằng định nghĩa

Phương pháp:

- Để chứng minh $\lim u_n = 0$ ta chứng minh với mọi số $a > 0$ nhỏ tùy ý luôn tồn tại một số n_a sao cho $|u_n| < a \quad \forall n > n_a$.
- Để chứng minh $\lim u_n = l$ ta chứng minh $\lim(u_n - l) = 0$.
- Để chứng minh $\lim u_n = +\infty$ ta chứng minh với mọi số $M > 0$ lớn tùy ý, luôn tồn tại số tự nhiên n_M sao cho $u_n > M \quad \forall n > n_M$.
- Để chứng minh $\lim u_n = -\infty$ ta chứng minh $\lim(-u_n) = +\infty$.
- Một dãy số nếu có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng minh rằng:

1. $\lim \frac{n+2}{n+1} = 1$ **2.** $\lim \frac{n^2-1}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$ **3.** $\lim \frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}} = -2$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng dãy số $(u_n): u_n = (-1)^n$ không có giới hạn.

Ví dụ 3. Chứng minh các giới hạn sau:

1. $\lim \frac{n^2+1}{n} = +\infty$ **2.** $\lim \frac{2-n}{\sqrt{n}} = -\infty$

11. BÀI TẬP TỰ LUẬN TỰ LUYỆN

Bài 1 Chứng minh rằng:

1. $\lim \frac{1}{n+1} = 0$ **2.** $\lim \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$ **3.** $\lim \frac{\sin^2 n}{n+2} = 0$

4. $\lim(2n+1) = +\infty$ **5.** $\lim \frac{1-n^2}{n} = -\infty$

Bài 2 Chứng minh các giới hạn sau

1. $\lim \frac{2}{n+1} = 0$ **2.** $\lim \frac{\cos n + \sin n}{n^2+1} = 0$ **3.** $\lim \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} = 0$

4. $\lim \frac{3n^3+n}{n^2} = +\infty$ **5.** $\lim \frac{2-n}{\sqrt{n+1}} = -\infty$.

Bài 3 Dùng định nghĩa tìm các giới hạn sau :

1. $A = \lim \frac{2n+1}{n-2}$ **2.** $B = \lim \frac{2n+3}{n^2+1}$ **3.** $C = \lim \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$.

Bài 4 Tìm các giới hạn sau

1. $A = \lim \frac{n - 2\sqrt{n}}{2n}$ **2.** $B = \lim \frac{n \sin n - 3n^2}{n^2}$

3. $C = \lim \frac{1}{n^2 + 2\sqrt{n} + 7}$ **4.** $D = \lim \frac{4n+1}{\sqrt{n^2+3n+2}}$.

Bài 5 Chứng minh rằng dãy số $(u_n): u_n = (-1)^n n$ không có giới hạn.

Bài 6 Chứng minh các giới hạn sau:

1. $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ **2.** $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ với $a > 0$

Bài 7

1. Nếu dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn là a thì dãy số các trung bình $\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)$ cũng có giới hạn là a.

2. Dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $1<x_1<2$ và $x_{n+1}=1+x_n-\frac{1}{2}x_n^2, \forall n\in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số đã cho hội tụ.

Vấn đề 2. Tìm giới hạn của dãy số dựa vào các định lý và các giới hạn cơ bản

Phương pháp:

Sử dụng các định lí về giới hạn, biến đổi đưa về các giới hạn cơ bản.

- Khi tìm $\lim\frac{f(n)}{g(n)}$ ta thường chia cả tử và mẫu cho n^k, trong đó k là bậc lớn nhất của tử và mẫu.
- Khi tìm $\lim\left[\sqrt[k]{f(n)}-\sqrt[m]{g(n)}\right]$ trong đó $\lim f(n)=\lim g(n)=+\infty$ ta thường tách và sử dụng phương pháp nhân lượng liên hơn.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau :

1. $A=\lim\frac{n\sqrt{1+3+5+...+(2n-1)}}{2n^2+1}$ **2.** $B=\lim\frac{\sqrt{1+2+...+n}-n}{\sqrt[3]{1^2+2^2+...+n^2}+2n}$

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau :

1. $C=\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$

2. $D=\lim\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right]$

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn sau :

1. $A=\lim\frac{4^{n+1}-5^{n+1}}{4^n+5^n}$ **2.** $B=\lim\frac{4.3^{n+2}-2.7^{n-1}}{4^n+7^{n+1}}$

Ví dụ 4. Tìm giới hạn sau : $C=\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$

1I. BÀI TẬP TỰ LUẬN TỰ LUYỆN

Bài 1 Tìm các giới hạn sau :

1. $A=\lim\frac{2n^2+3n+1}{3n^2-n+2}$ **2.** $B=\lim\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n-\sqrt{3n^2+1}}$

3. $C=\lim\frac{\left(2n^2+1\right)^4(n+2)^9}{n^{17}+1}$ **4.** $D=\lim\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{3n^3+2}}{\sqrt[4]{2n^4+n+2}-n}$

Bài 2 Tìm các giới hạn sau :

1. $A=\lim\left(\sqrt{n^2+6n}-n\right)$ **2.** $B=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+9n^2}-n\right)$

3. $C=\lim\frac{3.2^n-3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$ **4.** $D=\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt[3]{n^3+2n^2}\right)$.

Bài 3 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\left(\sqrt{n^2+2n+2}+n\right)$ **2.** $B=\lim\left(\sqrt{2n^2+1}-n\right)$

3. $C=\lim\dfrac{\sqrt[4]{3n^3+1}-n}{\sqrt{2n^4+3n+1}+n}$ **4.** $D=\lim\dfrac{a_kn^k+...+a_1n+a_0}{b_pn^p+...+b_1n+b_0}$

(Trong đó k,p là các số nguyên dương; $a_kb_p\neq 0$).

5. $A=\lim\left(n^3-2n+1\right)$ **6.** $B=\lim\left(\sqrt{n^2+n-1}+n\right)$

7. $C=\lim\left(a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+...+a_0\right)$ với $a_k\neq 0$

8. $D=\lim\left(2n-\sqrt[3]{n^3+1}\right)$

9. $E=\lim\dfrac{3n^3+n-1}{(2n-1)(n+3)^2}$ **10.** $F=\lim\dfrac{(n-2)^7(2n+1)^3}{(n^2+2)^5}$

11. $H=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$ **12.** $M=\lim\left(\sqrt[3]{1-n^2-8n^3}+2n\right)$

13. $N=\lim\left(\sqrt{4n^2+1}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)$

14. $K=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-3\sqrt{4n^2+n+1}+5n\right)$.

Bài 4. Tìm các giới hạn sau

1. $A=\lim\dfrac{2n+1}{1-3n}$ **2.** $B=\lim\dfrac{4n^2+3n+1}{(3n-1)^2}$

3. $C=\lim\dfrac{n^3+1}{n(2n+1)^2}$ **4.** $D=\lim\dfrac{n^3-3n^2+2}{n^4+4n^3+1}$

5. $E=\lim\dfrac{\sqrt{n^3+2n+1}}{n+2}$ **6.** $F=\lim\dfrac{\sqrt[4]{n^4-2n+1}+2n}{\sqrt[3]{3n^3+n}-n}$

7. $M=\lim\left(\sqrt{n^2+6n}-n\right)$ **8.** $N=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}-n\right)$

9. $H=\lim n\left(\sqrt[3]{8n^3+n}-\sqrt{4n^2+3}\right)$ **10.** $K=\lim\dfrac{3.2^n-3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$.

Bài 5 Tìm các giới hạn sau

1. $A=\lim\dfrac{2n^3+\sin 2n-1}{n^3+1}$ **2.** $B=\lim\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt{n^3+2n}}$

3. $C=\lim\sqrt{\dfrac{3.3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}}}$ **4.** $D=\lim\dfrac{n+1}{n^2(\sqrt{3n^2+2}-\sqrt{3n^2-1})}$

5. $E=\lim(\sqrt{n^2+n+1}-2n)$ **6.** $F=\lim\left(\sqrt{n+1}+n\right)$

7. $H=\lim(\sqrt[k]{n^2+1}-\sqrt[p]{n^2-1})$ **8.** $K=\lim n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

Bài 6. Tìm giới hạn của các dãy số sau

1. $u_n=\dfrac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$

2. $u_n=\dfrac{(n+1)\sqrt{1^3+2^3+...+n^3}}{3n^3+n+2}$

3. $u_n=(1-\frac{1}{T_1})(1-\frac{1}{T_2})...(1-\frac{1}{T_n})$ trong đó $T_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

4. $u_n=\frac{2^3-1}{2^3+1}.\frac{3^3-1}{3^3+1}....\frac{n^3-1}{n^3+1}$

5. $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}$

6. $u_n=q+2q^2+...+nq^n$ **với** $|q|<1$

7. $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$

Bài 7 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\frac{a_k.n^k+a_{k-1}n^{k-1}+...+a_1n+a_0}{b_p.n^p+b_{p-1}n^{p-1}+...+b_1n+b_0}$ với $a_kb_p\neq 0$

2. $B=\lim\frac{\sqrt[3]{n^6+n+1}-4\sqrt{n^4+2n-1}}{(2n+3)^2}$

3. $C=\lim\left(\sqrt{4n^2+n+1}-2n\right)$

4. $D=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-2\sqrt[3]{n^3+n^2-1}+n\right)$

Bài 8

1. Cho các số thực a,b thỏa $|a|<1;|b|<1$. Tìm giới hạn $I=\lim\frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}$.

2. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1=\frac{1}{2},x_{n+1}=x_n^2+x_n,\forall n\geq 1$

Đặt $S_n=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+1}$. Tính $\lim S_n$.

3. Cho dãy (x_k) được xác định như sau: $x_k=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+...+\frac{k}{(k+1)!}$

Tìm $\lim u_n$ với $u_n=\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+...+x_{2011}^n}$.

4. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases}u_0=2011\\ u_{n+1}=u_n+\frac{1}{u_n^2}\end{cases}$. Tìm $\lim\frac{u_n^3}{n}$.

5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $u_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$.Đặt $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$. Tìm $\lim S_n$.

6. Cho dãy (u_n) xác định như sau: $\begin{cases}u_1=1;\\ u_{n+1}=u_n+\frac{u_n^2}{2010}\end{cases}$. Tìm $\lim\left(\sum\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

7. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{4n+1}{2^n}$. Dãy (s_n) được cho bởi $s_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$. Tìm $\lim s_n$.

8. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=\frac{u_n(u_n+1)^2-8}{5},(n\geq 1,n\in N)\end{cases}$.Xét sự hội tụ và tính giới hạn sau nếu tồn tại: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i-2}{u_i^2+1}$.

Bài 9 Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $u_1=2$ và $u_{n+1}=\frac{u_n^2}{2011}+\frac{2010}{2011}u_n$ với $n=1,2,3,...$

1. Chứng minh (u_n) là dãy số tăng và không bị chặn trên.

2. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{u_i}{u_{i+1}-1}$.

Bài 10.

1. Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $x_1=1, x_2=2, x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n}, \forall n\ge 1$.
Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn và tìm giới hạn đó.

2. Cho dãy số $(u_n): u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.

3. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases}u_1=2\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2-u_n+3}{u_n^2+u_n+1},\ \forall n=1,2,....\end{cases}$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

4. Cho dãy số (u_n) thỏa: $u_n+u_{n+1}\ge 2u_{n+2}$ và dãy (u_n) bị chặn. Chứng minh rằng dãy (u_n) tồn tại giới hạn hữu và tìm giới hạn đó.

5. Cho dãy (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases}u_0=1, u_1=5\\ u_{n+2}=\dfrac{u_{n+1}+\sqrt{u_n^2+6}}{3}\end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

6. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+4u_n+1}{u_n^2+u_n+1}, n\ge 1\end{cases}$. Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

7. Cho dãy số (x_n) sao cho $\begin{cases}x_1=1; x_2=2\\ x_{n+1}=\sqrt{4x_n+3x_{n-1}}\end{cases}$. Chứng minh dãy số trên có giới hạn và tìm giới hạn trên.

Bài 11. Cho dãy số (x_n) xác định như sau: $x_0=\sqrt{2011}, x_{n+1}=\frac{2}{1+x_n^2}; \forall n=0,1,2,...$

1. Đặt $u_n=x_{2n}, \forall n=1,2,3,...$ Chứng minh dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.

2. Chứng minh rằng dãy (x_n) cũng có giới hạn hữu hạn.

Bài 12. Tìm $\lim u_n$ biết:

1. $u_n=\frac{n.\sqrt{1+3+5+...+(2n-1)}}{2n^2+1}$

2. $u_n=\lim\frac{\sqrt{1+2+...+n}-n}{\sqrt[3]{1^2+2^2+...+n^2}+2n}$

3. $u_n=\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$

4. $u_n=(1-\frac{1}{T_1})(1-\frac{1}{T_2})...(1-\frac{1}{T_n})$ trong đó $T_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

5. $u_n=\frac{2^3-1}{2^3+1}.\frac{3^3-1}{3^3+1}....\frac{n^3-1}{n^3+1}$

6. $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}$

7. $u_n=q+2q^2+...+nq^n$ với $|q|<1$

8. $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$

9. $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

10. $u_n=\underbrace{\sqrt{2\sqrt{2...\sqrt{2}}}}_{\text{n dau can}}$.

Bài 13. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $x_n=2n+a\sqrt[3]{8n^3+1}\forall n\in N$, a là số thực cho trước.

1. Tìm điều kiện của a để dãy số trên có giới hạn hữu hạn.

2. Tìm điều kiện của a sao cho dãy số trên là dãy số tăng.

Bài 14. Cho số thực α và xét dãy số (x_n) với $\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_{n+1} = x_n^{\,2} - 2x_n + 2 \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

1. Với $\alpha \in (1;2)$. Chứng minh $1 < x_n < 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và (x_n) là dãy số giảm.

2. Với $\alpha \in [1;+\infty)$. Tùy vào giá trị của α, tìm giới hạn của (x_n).

Bài 15.

1. Gọi (u_n) là dãy số xác định bởi $u_1 = \dfrac{4}{9}; u_{n+1} = -\dfrac{4}{9} + \dfrac{8}{9}\sqrt{3u_n}$. Tìm $\lim u_n$.

2. Giả sử $f(x)$ là hàm số được xác định trên tập số thực R và thỏa mãn bất phương trình: $9f(4x) \ge 4 + 4\sqrt{12f(3x) - 9f(4x)}$.

Chứng minh: $f(x) \ge u_n \ \forall n \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{R}$. Từ đó hãy suy ra $f(x) \ge \dfrac{4}{3}$.

3. Cho các dãy số $(x_n),(y_n),(z_n)$ được xác định như sau: $\begin{cases} x_1 = a; y_1 = b; z_1 = c \\ x_n = \dfrac{y_{n-1} + z_{n-1}}{2}, y_n = \dfrac{z_{n-1} + x_{n-1}}{2}, z_n = \dfrac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} \end{cases}$

Chứng minh rằng các dãy trên cùng hội tụ về giá trị $\dfrac{a+b+c}{3}$.

5. Cho $a > 2$ và dãy số (x_n) với $\begin{cases} x_1 = a \\ 2x_{n+1} = \sqrt{3x_n^2 + \dfrac{n+3}{n}} \end{cases}$.

a) Chứng minh : $x_n > 1$, với $n \in \mathbb{N}^*$

b)Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 16.

1. Dãy số (a_n) được xác định bởi : $\begin{cases} a_1 = a_2 = \dfrac{3}{2} \\ a_{n+1} = \dfrac{2}{a_n + a_{n-1}}, \ \forall n = 2,3,4.. \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy số (a_n) hội tụ và tìm giới hạn của dãy số đó.

2. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n(u_n+1)(u_n+2)(u_n+3)+1}; \ n = 1,2,.. \end{cases}$.Đặt $v_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{u_i + 2}$. Tìm $\lim v_n$.

3. Cho dãy (x_n) : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_n = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}\right), \ \forall n \ge 2 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (y_n) xác định bởi $y_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i^2}$ có giới hạn và tìm giới hạn đó.

4. Cho $a, b \in \mathbb{N}^\star, (a,b) = 1; n \in \{ab+1, ab+2, ...\}$. Kí hiệu r_n là số cặp số $(u,v) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ sao cho $n = au + bv$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r_n}{n} = \dfrac{1}{ab}$.

Bài 17.

1. Cho dãy $(x_n): x_1 = 1; \ x_{n+1} = \dfrac{(2+\cos 2\alpha)x_n + \cos^2\alpha}{(2-2\cos 2\alpha)x_n + 2 - \cos 2\alpha}$ trong đó α là số thực. Đặt $y_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2x_i + 1} \ \ \forall n \ge 1$. Tìm α để dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

2. Cho c là một số thực dương. Dãy (x_n) được xây dựng như sau: $x_{n+1} = \sqrt{c - \sqrt{c + x_n}}$, $n = 0,1,2..$ nếu các biểu thức dưới dấu căn không âm. Tìm tất cả các giá trị của c, để với mọi giá trị ban đầu $x_0 \in (0;c)$, dãy (x_n) xác định với mọi n và tồn tại giới hạn hữu hạn.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Vấn đề 1. DÃY SỐ DẠNG PHÂN THỨC

Câu 1. Kết quả của giới hạn $\lim\left(\frac{\sin 5n}{3n}-2\right)$ bằng:

A. -2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** $\frac{5}{3}$.

Câu 2. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn k để $\lim\frac{n-2\sqrt{n^k}\cos\frac{1}{n}}{2n}=\frac{1}{2}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** Vô số.

Câu 3. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{3\sin n+4\cos n}{n+1}$ bằng:

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 4. Kết quả của giới hạn $\lim\left(5-\frac{n\cos 2n}{n^2+1}\right)$ bằng:

A. 4. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 5. **D.** -4.

Câu 5. Kết quả của giới hạn $\lim\left(n^2\sin\frac{n\pi}{5}-2n^3\right)$ là:

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 6. Giá trị của giới hạn $\lim\left(4+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ bằng:

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 7. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n=\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ và $v_n=\frac{1}{n^2+2}$. Khi đó $\lim(u_n+v_n)$ có giá trị bằng:

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 8. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{-3}{4n^2-2n+1}$ là:

A. $-\frac{3}{4}$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 9. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{n+2n^2}{n^3+3n-1}$ bằng:

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 0.

Câu 10. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1}$ là:

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $\frac{2}{7}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 11. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{n\sqrt{n}+1}{n^2+2}$ bằng:

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 12. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n=\frac{1}{n+1}$ và $v_n=\frac{2}{n+2}$. Khi đó $\lim\frac{v_n}{u_n}$ có giá trị bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 13. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{an+4}{5n+3}$ trong đó a là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là:

A. $a=10$. **B.** $a=8$. **C.** $a=6$. **D.** $a=4$.

Câu 14. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{2n+b}{5n+3}$ trong đó b là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, giá trị của b là:

A. b là một số thực tùy ý. **B.** $b=2$.

C. không tồn tại b. **D.** $b=5$.

Câu 15. Tính giới hạn $L=\lim\frac{n^2+n+5}{2n^2+1}$.

A. $L=\frac{3}{2}$. **B.** $L=\frac{1}{2}$. **C.** $L=2$. **D.** $L=1$.

Câu 16. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{4n^2+n+2}{an^2+5}$. Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của a là:

A. $a=-4$. **B.** $a=4$. **C.** $a=3$. **D.** $a=2$.

Câu 17. Tính giới hạn $L=\lim\frac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}$.

A. $L=-\frac{3}{2}$. **B.** $L=\frac{1}{5}$. **C.** $L=\frac{1}{2}$. **D.** $L=0$.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để $L=\lim\frac{5n^2-3an^4}{(1-a)n^4+2n+1}>0$.

A. $a\le 0; a\ge 1$. **B.** $0<a<1$.

C. $a<0$; $a>1$. **D.** $0\le a<1$.

Câu 19. Tính giới hạn $L=\lim\frac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)}$.

A. $L=-\frac{3}{2}$. **B.** $L=1$. **C.** $L=3$. **D.** $L=+\infty$.

Câu 20. Tính giới hạn $L=\lim\frac{(n^2+2n)(2n^3+1)(4n+5)}{(n^4-3n-1)(3n^2-7)}$.

A. $L=0$. **B.** $L=1$. **C.** $L=\frac{8}{3}$. **D.** $L=+\infty$.

Câu 21. Tính giới hạn $L=\lim\frac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n+8}}$.

A. $L=\frac{1}{2}$. **B.** $L=1$. **C.** $L=\frac{1}{8}$. **D.** $L=+\infty$.

Câu 22. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{n^3-2n}{1-3n^2}$ là:

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 23. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}$ là:

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $+\infty$. **C.** 0 **D.** $\frac{5}{7}$.

Câu 24. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{3n-n^4}{4n-5}$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 25. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim\frac{3+2n^3}{2n^2-1}$. **B.** $\lim\frac{2n^2-3}{-2n^3-4}$.

C. $\lim\frac{2n-3n^3}{-2n^2-1}$. **D.** $\lim\frac{2n^2-3n^4}{-2n^4+n^2}$.

Câu 26. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng $-\frac{1}{3}$?

A. $u_n=\frac{n^2-2n}{3n^2+5}$. **B.** $u_n=\frac{-n^4+2n^3-1}{3n^3+2n^2-1}$.

C. $u_n=\frac{n^2-3n^3}{9n^3+n^2-1}$. **D.** $u_n=\frac{-n^2+2n-5}{3n^3+4n-2}$.

Câu 27. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

A. $u_n=\frac{1+n^2}{5n+5}$. **B.** $u_n=\frac{n^2-2}{5n+5n^3}$.

C. $u_n=\frac{n^2-2n}{5n+5n^2}$. **D.** $\frac{1+2n}{5n+5n^2}$.

Câu 28. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

A. $\frac{1+2n}{5n+5n^2}$. **B.** $u_n=\frac{n^3+2n-1}{-n+2n^3}$.

C. $u_n=\frac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3}$. **D.** $u_n=\frac{n^2-2n}{5n+1}$.

Câu 29. Tính giới hạn $L=\lim(3n^2+5n-3)$.

A. $L=3$. **B.** $L=-\infty$. **C.** $L=5$. **D.** $L=+\infty$.

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(-10;10)$ để $L=\lim\left(5n-3(a^2-2)n^3\right)=-\infty$.

A. 19. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 10.

Câu 31. Tính giới hạn $\lim(3n^4+4n^2-n+1)$.

A. $L=7$. **B.** $L=-\infty$. **C.** $L=3$. **D.** $L=+\infty$.

Câu 32. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2+...+(\sqrt{2})^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\lim u_n=-\infty$. **B.** $\lim u_n=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$.

C. $\lim u_n=+\infty$. **D.** Không tồn tại $\lim u_n$.

Câu 33. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+...+\frac{n}{2}}{n^2+1}$ bằng:

A. $\frac{1}{8}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 34. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}\right)$ bằng:

A. 0. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu 35. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\frac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4}\right)$ bằng:

A. 0. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 1.

Câu 36. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ là:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Câu 37. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 38. Giá trị của giới hạn $\lim\left[\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+......+\frac{1}{n(n+3)}\right]$ bằng:

A. $\frac{11}{18}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 39. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n(n^2+1)}$ bằng:

A. 4. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 40. Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_n=\frac{1}{2}\\ u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n},\ n\ge 1\end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n=-1$. **B.** $\lim u_n=0$.

C. $\lim u_n=\frac{1}{2}$. **D.** $\lim u_n=1$.

Câu 41. Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=2\\ u_{n+1}=\frac{u_n+1}{2},\ n\ge 1\end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n=1$. **B.** $\lim u_n=0$. **C.** $\lim u_n=2$. **D**

Câu 42. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 43. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}$ bằng:

A. $-\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Câu 44. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n}+5}$ là:

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5}{7}$. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Câu 45. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{\sqrt{n+1}-4}{\sqrt{n+1}+n}$ bằng:

A. 1. **B.** 0. **C.** -1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 46. Biết rằng $\lim\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-n}-2}=a\sin\frac{\pi}{4}+b$. Tính $S=a^3+b^3$.

A. $S=1$. **B.** $S=8$. **C.** $S=0$. **D.** $S=-1$.

Câu 47. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$ là:

A. $+\infty$. **B.** 10. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Câu 48. Kết quả của giới hạn $\lim(n+1)\sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}}$ là:

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Câu 49. Biết rằng $\lim \dfrac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}} = b\sqrt{3}+c$ với a, b, c là các tham số. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{a+c}{b^3}$.

A. $P = 3$. **B.** $P = \dfrac{1}{3}$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = \dfrac{1}{2}$.

Câu 50. Kết quả của giới hạn $\lim \sqrt[5]{200-3n^5+2n^2}$ là:

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Vấn đề 2. DÃY SỐ CHỨA CĂN THỨC

Câu 51. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}\right)$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 52. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)$ là:

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Câu 53. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2}\right)$ là:

A. -2. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 54. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

Câu 55. Có bao nhiêu giá trị của a để $\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\right)=0$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 56. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\right)$ là:

A. 0. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 57. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}\right)$ là:

A. -1. **B.** $1-\sqrt{2}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 58. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thỏa $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=0$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 59. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)$ là:

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 60. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}$, trong đó a là tham số thực. Tìm a để $\lim u_n=-1$.

A. 3. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -3.

Câu 61. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\right)$ bằng:

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 62. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)$ là:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 63. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)$ bằng:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 64. Giá trị của giới hạn $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\right]$ là:

A. -1. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 65. Giá trị của giới hạn $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right]$ bằng:

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 66. Giá trị của giới hạn $\lim\left[n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)\right]$ bằng:

A. -1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

Câu 67. Giá trị của giới hạn $\lim\left[n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)\right]$ là:

A. $\sqrt{7}-1$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** $+\infty$.

Câu 68. Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}$ là:

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 69. Giá trị của giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}$ là:

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Câu 70. Giá trị của giới hạn $\lim \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}-n}$ là:

A. 2. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Vấn đề 3. DÃY SỐ CHỨA HÀM LŨY THỪA

Câu 71. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}$ bằng:

A. $-\dfrac{25}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** 1. **D.** $-\dfrac{5}{2}$.

Câu 72. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{3^n-2.5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}$ bằng:

A. -15. **B.** -10. **C.** 10. **D.** 15.

Câu 73. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 74. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1}$ bằng:

A. -1. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 75. Biết rằng

$$\lim\left(\frac{\left(\sqrt{5}\right)^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}-3}+\frac{2n^2+3}{n^2-1}\right)=\frac{a\sqrt{5}}{b}+c \text{ với } a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}.$$

Tính giá trị của biểu thức $S=a^2+b^2+c^2$.

A. $S=26$. **B.** $S=30$. **C.** $S=21$. **D.** $S=31$.

Câu 76. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}$ là:

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 77. Kết quả của giới hạn $\lim\left[3^n-\sqrt{5^n}\right]$ là:

A. 3. **B.** $-\sqrt{5}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 78. Kết quả của giới hạn $\lim\left(3^4.2^{n+1}-5.3^n\right)$ là:

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** -1. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 79. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2n+4^n}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 80. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{2^{n+1}+3n+10}{3n^2-n+2}$ là:

A. $+\infty$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\infty$.

Câu 81. Tìm tất cả giá trị nguyên của a thuộc $(0;2018)$ để $\lim\sqrt[4]{\dfrac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+a}}}\le\dfrac{1}{1024}$.

A. 2007. **B.** 2008. **C.** 2017. **D.** 2016.

Câu 82. Kết quả của giới hạn $\lim\left(\dfrac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)$ bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** -1. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Câu 83. Kết quả của giới hạn $\lim\left(\dfrac{\sqrt{3n}+(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right)$ bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** -1.

Câu 84. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc $(0;20)$ sao cho $\lim\sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}}$ là một số nguyên.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 85. Kết quả của giới hạn $\lim\sqrt{2.3^n-n+2}$ là:

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Vấn đề 4. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Câu 86. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng $\dfrac{9}{4}$. Số hạng đầu u_1 của cấp số nhân đó là:

A. $u_1 = 3$. **B.** $u_1 = 4$. **C.** $u_1 = \frac{9}{2}$. **D.** $u_1 = 5$.

Câu 87. Tính tổng $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^{n-3}} + \cdots$.

A. $S = \frac{27}{2}$. **B.** $S = 14$. **C.** $S = 16$. **D.** $S = 15$.

Câu 88. Tính tổng $S = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots\right)$.

A. $S = \sqrt{2} + 1$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = 2\sqrt{2}$. **D.** $S = \frac{1}{2}$.

Câu 89. Tính tổng $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \cdots + \frac{2^n}{3^n} + \cdots$.

A. $S = 3$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = 6$.

Câu 90. Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{2.3^{n-1}}, \ldots$ bằng:

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Câu 91. Tính tổng $S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) + \ldots$.

A. 1. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 92. Giá trị của giới hạn $\lim \frac{1 + a + a^2 + \ldots + a^n}{1 + b + b^2 + \ldots + b^n} \left(|a| < 1, |b| < 1\right)$ bằng:

A. 0. **B.** $\frac{1-b}{1-a}$. **C.** $\frac{1-a}{1-b}$. **D.** Không tồn tại.

Câu 93. Rút gọn $S = 1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \cdots + \cos^{2n} x + \cdots$ với $\cos x \neq \pm 1$.

A. $S = \sin^2 x$. **B.** $S = \cos^2 x$.

C. $S = \frac{1}{\sin^2 x}$. **D.** $S = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Câu 94. Rút gọn $S = 1 - \sin^2 x + \sin^4 x - \sin^6 x + \cdots + (-1)^n . \sin^{2n} x + \cdots$ với $\sin x \neq \pm 1$.

A. $S = \sin^2 x$. **B.** $S = \cos^2 x$.

C. $S = \frac{1}{1 + \sin^2 x}$. **D.** $S = \tan^2 x$.

Câu 95. Thu gọn $S = 1 - \tan\alpha + \tan^2\alpha - \tan^3\alpha + \ldots$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

A. $S = \frac{1}{1 - \tan\alpha}$. **B.** $S = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}$.

C. $S = \frac{\tan\alpha}{1 + \tan\alpha}$. **D.** $S = \tan^2\alpha$.

Câu 96. Cho m, n là các số thực thuộc $(-1;1)$ và các biểu thức:

$$M = 1 + m + m^2 + m^3 + \cdots$$

$$N = 1 + n + n^2 + n^3 + \cdots$$

$$A = 1 + mn + m^2n^2 + m^3n^3 + \cdots$$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $A = \frac{MN}{M + N - 1}$. **B.** $A = \frac{MN}{M + N + 1}$.

C. $A = \frac{1}{M} + \frac{1}{N} - \frac{1}{MN}$. **D.** $A = \frac{1}{M} + \frac{1}{N} + \frac{1}{MN}$.

Câu 97. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,5111\cdots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính tổng $T = a + b$.

A. 17. **B.** 68. **C.** 133. **D.** 137.

Câu 98. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $A = 0,353535\ldots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $T = ab$.

A. 3456. **B.** 3465. **C.** 3645. **D.** 3546.

Câu 99. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $B = 5,231231\ldots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $T = a - b$.

A. 1409. **B.** 1490. **C.** 1049. **D.** 1940.

Câu 100. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,17232323\ldots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a - b > 2^{15}$. **B.** $a - b > 2^{14}$.

C. $a-b>2^{13}$. **D.** $a-b>2^{12}$.

1. GIỚI HẠN DÃY SỐ

Vấn đề 1. Tìm giới hạn bằng định nghĩa

Các ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng:

1. $\lim \frac{n+2}{n+1}=1$ **2.** $\lim \frac{n^2-1}{2n^2+1}=\frac{1}{2}$ **3.** $\lim \frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}}=-2$

Lời giải.

1. Với $a>0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a>\frac{1}{a}-1$, ta có:

$$\left|\frac{n+2}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n_a+1}<a \text{ với } \forall n>n_a$$

Suy ra $\lim\left|\frac{n+2}{n+1}-1\right|=0\Rightarrow \lim\frac{n+2}{n+1}=1$.

2. Với $a>0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a>\sqrt{\frac{3}{a}-1}$, ta có:

$$\left|\frac{n^2-1}{2n^2+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{n^2+1}<\frac{3}{n_a^2+1}<a \text{ với } \forall n>n_a$$

Suy ra $\lim\left|\frac{n^2-1}{2n^2+1}-\frac{1}{2}\right|=0\Rightarrow \lim\frac{n^2-1}{2n^2+1}=\frac{1}{2}$.

3. Với $a>0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a>\sqrt{\frac{9}{a^2}-1}$, ta có:

$$\left|\frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}}+2\right|=\left|\frac{1-2n+2\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}}\right|<\left|\frac{1-2n+2(n+1)}{\sqrt{n^2+1}}\right|=\frac{3}{\sqrt{n^2+1}}<\frac{3}{\sqrt{n_a^2+1}}<a \text{ với } \forall n>n_a.$$

Suy ra $\lim\left|\frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}}+2\right|=0\Rightarrow \lim\frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}}=-2$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng dãy số $(u_n):u_n=(-1)^n$ không có giới hạn.

Lời giải.

Ta có: $u_{2n}=1\Rightarrow \lim u_{2n}=1;\ u_{2n+1}=-1\Rightarrow \lim u_{2n+1}=-1$

Vì giới hạn của dãy số nếu có là duy nhất nên ta suy ra dãy (u_n) không có giới hạn.

Ví dụ 3. Chứng minh các giới hạn sau:

1. $\lim\frac{n^2+1}{n}=+\infty$ **2.** $\lim\frac{2-n}{\sqrt{n}}=-\infty$

Lời giải.

1. Với mọi số thực dương M lớn tùy ý, ta có:

$$\left|\frac{n^2+1}{n}\right|>M\Leftrightarrow n^2-Mn+1>0\Leftrightarrow n>\frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2}$$

Ta chọn $n_0=\left[\frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2}\right]$ thì ta có: $\frac{n^2+1}{n}>M,\ \forall n>n_0$

Do đó: $\lim\frac{n^2+1}{n}=+\infty$.

2. Với mọi $M>0$ lớn tùy ý, ta có:

$\frac{n-2}{\sqrt{n}} > M \Leftrightarrow n - M\sqrt{n} - 2 > 0 \Leftrightarrow n > \left(\frac{M+\sqrt{M^2+8}}{2}\right)^2$

Ta chọn $n_0 = \left[\left(\frac{M+\sqrt{M^2+8}}{2}\right)^2\right]$ thì ta có: $\frac{n-2}{\sqrt{n}} > M,\ \forall n > n_0$

Do đó: $\lim \frac{2-n}{\sqrt{n}} = -\infty$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Chứng minh rằng:

1. $\lim \frac{1}{n+1} = 0$ **2.** $\lim \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$ **3.** $\lim \frac{\sin^2 n}{n+2} = 0$

4. $\lim(2n+1) = +\infty$ **5.** $\lim \frac{1-n^2}{n} = -\infty$

Bài 2 Chứng minh các giới hạn sau

1. $\lim \frac{2}{n+1} = 0$ **2.** $\lim \frac{\cos n + \sin n}{n^2+1} = 0$ **3.** $\lim \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} = 0$

4. $\lim \frac{3n^3+n}{n^2} = +\infty$ **5.** $\lim \frac{2-n}{\sqrt{n+1}} = -\infty$.

Bài 3 Dùng định nghĩa tìm các giới hạn sau :

1. $A = \lim \frac{2n+1}{n-2}$ **2.** $B = \lim \frac{2n+3}{n^2+1}$ **3.** $C = \lim \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$.

Bài 4 Tìm các giới hạn sau

1. $A = \lim \frac{n-2\sqrt{n}}{2n}$ **2.** $B = \lim \frac{n\sin n - 3n^2}{n^2}$

3. $C = \lim \frac{1}{n^2+2\sqrt{n}+7}$ **4.** $D = \lim \frac{4n+1}{\sqrt{n^2+3n+2}}$.

Bài 5 Chứng minh rằng dãy số $(u_n): u_n = (-1)^n n$ không có giới hạn.

Bài 6 Chứng minh các giới hạn sau:

1. $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ **2.** $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ với $a > 0$

Bài 7

1. Nếu dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn là a thì dãy số các trung bình $\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)$ cũng có giới hạn là a.

2. Dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $1 < x_1 < 2$ và

$x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{2}x_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số đã cho hội tụ. Tìm $\lim x_n$.

ĐÁP ÁN

Bài 1 :

1. Với $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \frac{1}{a} - 1$ ta có $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_a+1} < a\ \ \forall n > n_a$ nên có $\lim \frac{1}{n+1} = 0$.

2. Với $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \sqrt[k]{\frac{1}{a}}$ ta có $\frac{1}{n^k} < \frac{1}{n_a^k} < a\ \ \forall n > n_a$ nên có $\lim \frac{1}{n^k} = 0$.

3. Với $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \frac{1}{a} - 2$ ta có $\frac{\sin^2 n}{n+2} < \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n_a+2} < a\ \ \forall n > n_a$ nên có $\lim \frac{\sin^2 n}{n+2} = 0$.

4. Với mọi số dương M lớn tùy ý ta chọn $n_M > \frac{M-1}{2}$

Ta có: $2n+1 > 2n_M + 1 > M \quad \forall n > n_M \Rightarrow \lim(2n+1) = +\infty$.

5. Với mọi số dương M lớn tùy ý ta chọn n_M thỏa $\frac{n_M^2 - 1}{n_M} > M$

$\Leftrightarrow n_M > \frac{M + \sqrt{M^2+4}}{2}$.

Ta có: $\frac{n^2-1}{n} > M \quad \forall n > n_M \Rightarrow \lim \frac{n^2-1}{n} = +\infty$

Vậy $\lim \frac{1-n^2}{n} = -\infty$.

Bài 2

1. Với mọi $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a = \left[\frac{2}{a} - 1\right] + 1$

Suy ra $\frac{2}{n+1} < a \quad \forall n > n_a \Rightarrow \lim \frac{2}{n+1} = 0$.

2. Ta có $\frac{|\cos n + \sin n|}{n^2} < \frac{2}{n^2}$ mà $\lim \frac{1}{n^2} = 0 \Rightarrow \lim \frac{\cos n + \sin n}{n^2+1} = 0$

3. Với mọi số thực $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a = \left[\frac{1}{a^2} - 1\right] + 1$

Ta có: $\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} < a \quad \forall n > n_a \Rightarrow \lim \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} = 0$.

4. Với mọi $M > 0$ lớn tùy ý, ta chọn $n_M = \left[\frac{M}{3}\right] + 1$

Ta có: $\frac{3n^3+n}{n^2} = 3n + \frac{1}{n} > M \quad \forall n > n_M$

Vậy $\lim \frac{3n^3+n}{n^2} = +\infty$.

5. Với mọi $M > 0$ lớn tùy ý , ta chọn $n_M > \left(\frac{1}{a} + 3\right)^2 - 1$

Ta có: $\frac{n-2}{\sqrt{1+n}} = \sqrt{n+1} - \frac{3}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{1+n} - 3 > M \; \forall n > n_M$

Suy ra $\lim \frac{2-n}{\sqrt{n+1}} = -\infty$.

Bài 3

1. Với số thực $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \frac{5}{a} + 2 > 2$

Ta có: $\left|\frac{2n+1}{n-2} - 2\right| = \frac{5}{|n-2|} < \frac{5}{n_a - 2} < a \quad \forall n > n_a$

Vậy $A = 2$.

2. Với số thực $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn n_a thỏa $\frac{2n_a + 3}{n_a^2 + 1} < a$

$\Leftrightarrow n_a > \frac{1 + \sqrt{a^2 - 4a + 13}}{a}$

Ta có: $\frac{2n+3}{n^2+1} < a \quad \forall n > n_a \Rightarrow B = 0$.

3. Với số thực $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \frac{1}{a} - 1$

Ta có: $\left|\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} - 1\right| < \left|\frac{n+2}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{n_a+1} < a \quad \forall n > n_a$

Vậy $C = 1$.

Bài 4

1. $A = \frac{1}{2}$ **2.** $B = -3$ **3.** $C = 0$ **4.** $D = 4$.

Bài 5 Ta có: $u_{2n} = 2n \to +\infty;\ u_{2n+1} = -(2n+1) \to -\infty$

Do đó dãy số đã cho không có giới hạn.

Bài 6

1. Gọi m là số tự nhiên thỏa: $m+1 > |a|$. Khi đó với mọi $n > m+1$

Ta có: $0 < \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \left|\frac{a}{1}.\frac{a}{2}...\frac{a}{m}\right|.\left|\frac{a}{m+1}...\frac{a}{n}\right| < \frac{|a|^m}{m!}.\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m}$

Mà $\lim\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m} = 0$. Từ đó suy ra: $\lim\frac{a^n}{n!} = 0$.

2. Nếu $a = 1$ thì ta có đpcm

- Giả sử $a > 1$. Khi đó: $a = \left[1 + \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)\right]^n > n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$

Suy ra: $0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a}{n} \to 0$ nên $\lim\sqrt[n]{a} = 1$

- Với $0 < a < 1$ thì $\frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \lim\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1 \Rightarrow \lim\sqrt[n]{a} = 1$.

Tóm lại ta luôn có: $\lim\sqrt[n]{a} = 1$ với $a > 0$.

Bài 7

1. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a = 0$.

Với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi $n \ge n_0$ thì $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ và $\left|\frac{u_1 + u_2 + ... + u_{n_0}}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Từ đó ta có : $\left|\frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}\right| \le \left|\frac{u_1 + u_2 + ... + u_{n_0}}{n}\right| + \left|\frac{u_{n_0+1} + ... + u_n}{n}\right|$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(n - n_0)}{n}\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall n \ge N.$$

Suy ra: $\lim\frac{u_1 + ... + u_n}{n} = 0$.

2. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp bất đẳng thức sau:

$$\left|x_n - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2^n}, \forall n \ge 3.$$

Thật vậy ta kiểm tra được ngay bất đẳng thức đúng với $n = 3$.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n \ge 3$, tức là $\left|x_n - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2^n}$.

Khi đó ta có: $\left|x_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \frac{1}{2}\left|x_n - \sqrt{2}\right|\left|2 - \sqrt{2} - x_n\right|$

$$\le \frac{1}{2}\left|x_n-\sqrt{2}\right|\left(\left|\sqrt{2}-x_n\right|+\left|2-2\sqrt{2}\right|\right)$$
$$< \frac{1}{2}\left|x_n-\sqrt{2}\right| < \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Do đó bất đẳng thức đúng đến $n+1$.

Mặt khác do $\lim\frac{1}{2^n}=0$ nên từ bất đẳng thức trên và nguyên lý kẹp ta có $\lim\left(x_n-\sqrt{2}\right)=0 \Rightarrow \lim x_n=\sqrt{2}$.

Chú ý: *Ta có kết quả sau:*

Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa:* $\left|f(x)-f(y)\right|\le q.\left|x-y\right|$ *với mọi* $x,y\in\mathbb{R}$ *và* $q\in(0;1)$. *Khi đó dãy số* (u_n) *được xác định bởi* $u_0=c;\ u_n=f(u_{n-1}),\ \forall n=2,3,...$ *có giới hạn hữu hạn là nghiệm của phương trình* $f(x)=x$.

Sử dụng kết quả trên ta có nghiệm của phương trình $f(x)=x$ *có nghiệm là* $\sqrt{2}$ *nên ta mới đi chứng minh* $\lim x_n=\sqrt{2}$.

Vấn đề 2. Tìm giới hạn của dãy số dựa vào các định lý và các giới hạn cơ bản

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau :

1. $A=\lim\frac{n\sqrt{1+3+5+...+(2n-1)}}{2n^2+1}$ **2.** $B=\lim\frac{\sqrt{1+2+...+n}-n}{\sqrt[3]{1^2+2^2+...+n^2}+2n}$

Lời giải.

1. Ta có: $1+3+5+...+2n-1=n^2$

Suy ra $A=\lim\frac{n^2}{2n^2+1}=\lim\frac{1}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$.

2. Ta có: $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$;

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Suy ra : $B=\lim\frac{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-n}{\sqrt[3]{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}+2n}=\lim\frac{\sqrt{\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2}}-n}{\sqrt[3]{\frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}}+2n}=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}-1}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}+2}$.

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau :

1. $C=\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$

2. $D=\lim\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right]$

Lời giải.

1. Ta có: $1-\frac{1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$ nên suy ra

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1.3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}...\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{n+1}{2n}$$

Do vậy $C=\lim\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$.

2. Ta có $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ nên suy ra

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

Vậy $D=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$.

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn sau :

1. $A=\lim\frac{4^{n+1}-5^{n+1}}{4^n+5^n}$ **2.** $B=\lim\frac{4.3^{n+2}-2.7^{n-1}}{4^n+7^{n+1}}$

Lời giải.

1. Chia cả tử và mẫu cho 5^n ta có: $A=\lim\frac{4\left(\frac{4}{5}\right)^n-5}{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1}=-5$ (do $\lim\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$).

2. Ta có: $B=\lim\frac{36\left(\frac{4}{7}\right)^n-\frac{2}{7}}{\left(\frac{4}{7}\right)^n+7}=-\frac{2}{49}$.

Ví dụ 4. Tìm giới hạn sau : $C=\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$

Lời giải.

Ta có: $1-\frac{1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$ nên suy ra

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1.3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}...\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{n+1}{2n}$$

Do vậy $C=\lim\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tìm các giới hạn sau :

1. $A=\lim\frac{2n^2+3n+1}{3n^2-n+2}$ **2.** $B=\lim\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n-\sqrt{3n^2+1}}$

3. $C=\lim\frac{\left(2n^2+1\right)^4\left(n+2\right)^9}{n^{17}+1}$ **4.** $D=\lim\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{3n^3+2}}{\sqrt[4]{2n^4+n+2}-n}$

Bài 2 Tìm các giới hạn sau :

1. $A=\lim\left(\sqrt{n^2+6n}-n\right)$ **2.** $B=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+9n^2}-n\right)$

3. $C=\lim\frac{3.2^n-3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$ **4.** $D=\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt[3]{n^3+2n^2}\right)$.

Bài 3 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\left(\sqrt{n^2+2n+2}+n\right)$ **2.** $B=\lim\left(\sqrt{2n^2+1}-n\right)$

3. $C=\lim\frac{\sqrt[4]{3n^3+1}-n}{\sqrt{2n^4+3n+1}+n}$ **4.** $D=\lim\frac{a_kn^k+...+a_1n+a_0}{b_pn^p+...+b_1n+b_0}$

(Trong đó k,p là các số nguyên dương; $a_kb_p\neq 0$).

5. $A=\lim\left(n^3-2n+1\right)$ **6.** $B=\lim\left(\sqrt{n^2+n-1}+n\right)$

7. $C=\lim\left(a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+...+a_0\right)$ với $a_k\neq 0$

8. $D=\lim\left(2n-\sqrt[3]{n^3+1}\right)$

9. $E=\lim\dfrac{3n^3+n-1}{(2n-1)(n+3)^2}$

10. $F=\lim\dfrac{(n-2)^7(2n+1)^3}{(n^2+2)^5}$

11. $H=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$

12. $M=\lim\left(\sqrt[3]{1-n^2-8n^3}+2n\right)$

13. $N=\lim\left(\sqrt{4n^2+1}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)$

14. $K=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-3\sqrt{4n^2+n+1}+5n\right)$.

Bài 4. Tìm các giới hạn sau

1. $A=\lim\dfrac{2n+1}{1-3n}$

2. $B=\lim\dfrac{4n^2+3n+1}{(3n-1)^2}$

3. $C=\lim\dfrac{n^3+1}{n(2n+1)^2}$

4. $D=\lim\dfrac{n^3-3n^2+2}{n^4+4n^3+1}$

5. $E=\lim\dfrac{\sqrt{n^3+2n}+1}{n+2}$

6. $F=\lim\dfrac{\sqrt[4]{n^4-2n+1}+2n}{\sqrt[3]{3n^3+n}-n}$

7. $M=\lim\left(\sqrt{n^2+6n}-n\right)$

8. $N=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}-n\right)$

9. $H=\lim n\left(\sqrt[3]{8n^3+n}-\sqrt{4n^2+3}\right)$

10. $K=\lim\dfrac{3.2^n-3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$.

Bài 5 Tìm các giới hạn sau

1. $A=\lim\dfrac{2n^3+\sin 2n-1}{n^3+1}$

2. $B=\lim\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt{n^3+2n}}$

3. $C=\lim\sqrt{\dfrac{3.3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}}}$

4. $D=\lim\dfrac{n+1}{n^2(\sqrt{3n^2+2}-\sqrt{3n^2-1})}$

5. $E=\lim(\sqrt{n^2+n+1}-2n)$

6. $F=\lim\left(\sqrt{n+1}+n\right)$

7. $H=\lim(\sqrt[k]{n^2+1}-\sqrt[p]{n^2-1})$

8. $K=\lim n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

Bài 6. Tìm giới hạn của các dãy số sau

1. $u_n=\dfrac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$

2. $u_n=\dfrac{(n+1)\sqrt{1^3+2^3+...+n^3}}{3n^3+n+2}$

3. $u_n=(1-\dfrac{1}{T_1})(1-\dfrac{1}{T_2})...(1-\dfrac{1}{T_n})$ trong đó $T_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

4. $u_n=\dfrac{2^3-1}{2^3+1}.\dfrac{3^3-1}{3^3+1}....\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$

5. $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{2^k}$

6. $u_n=q+2q^2+...+nq^n$ **với** $|q|<1$

7. $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k}$

Bài 7 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\dfrac{a_k.n^k+a_{k-1}n^{k-1}+...+a_1n+a_0}{b_p.n^p+b_{p-1}n^{p-1}+...+b_1n+b_0}$ với $a_kb_p\neq 0$

2. $B=\lim\dfrac{\sqrt[3]{n^6+n+1}-4\sqrt{n^4+2n-1}}{(2n+3)^2}$

3. $C=\lim\left(\sqrt{4n^2+n+1}-2n\right)$

4. $D=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-2\sqrt[3]{n^3+n^2-1}+n\right)$

Bài 8

1. Cho các số thực a,b thỏa $|a|<1;|b|<1$. Tìm giới hạn

$$I=\lim\frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}.$$

2. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1=\dfrac{1}{2},x_{n+1}=x_n^2+x_n,\forall n\geq 1$

Đặt $S_n=\dfrac{1}{x_1+1}+\dfrac{1}{x_2+1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n+1}$. Tính $\lim S_n$.

3. Cho dãy (x_k) được xác định như sau: $x_k=\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+...+\dfrac{k}{(k+1)!}$

Tìm $\lim u_n$ với $u_n=\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+...+x_{2011}^n}$.

4. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases}u_0=2011\\ u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{u_n^2}\end{cases}$. Tìm $\lim\dfrac{u_n^3}{n}$.

5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $u_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$.
Đặt $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$. Tìm $\lim S_n$.

6. Cho dãy (u_n) xác định như sau: $\begin{cases}u_1=1;\\ u_{n+1}=u_n+\dfrac{u_n^2}{2010}\end{cases}$. Tìm $\lim\left(\sum\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

7. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{4n+1}{2^n}$. Dãy (s_n) được cho bởi $s_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i$. Tìm $\lim s_n$.

8. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n(u_n+1)^2-8}{5},(n\geq 1,n\in N)\end{cases}$.

Xét sự hội tụ và tính giới hạn sau nếu tồn tại: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{u_i-2}{u_i^2+1}$.

Bài 9 Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $u_1=2$ và

$$u_{n+1}=\frac{u_n^2}{2011}+\frac{2010}{2011}u_n \text{ với } n=1,2,3,...$$

1. Chứng minh (u_n) là dãy số tăng và không bị chặn trên.

2. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{u_i}{u_{i+1}-1}$.

Bài 10.

1. Cho dãy số (x_n) được xác định như sau:

$$x_1=1, x_2=2, x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n}, \forall n\ge 1.$$

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn và tìm giới hạn đó.

2. Cho dãy số $(u_n): u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.

3. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2-u_n+3}{u_n^2+u_n+1}, \ \forall n=1,2,.... \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

4. Cho dãy số (u_n) thỏa: $u_n+u_{n+1}\ge 2u_{n+2}$ và dãy (u_n) bị chặn. Chứng minh rằng dãy (u_n) tồn tại giới hạn hữu và tìm giới hạn đó.

5. Cho dãy (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_0=1, u_1=5 \\ u_{n+2}=\dfrac{u_{n+1}+\sqrt{u_n^2+6}}{3} \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

6. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+4u_n+1}{u_n^2+u_n+1}, n\ge 1 \end{cases}$. Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

7. Cho dãy số (x_n) sao cho $\begin{cases} x_1=1; x_2=2 \\ x_{n+1}=\sqrt{4x_n+3x_{n-1}} \end{cases}$. Chứng minh dãy số trên có giới hạn và tìm giới hạn trên.

Bài 11. Cho dãy số (x_n) xác định như sau:

$$x_0=\sqrt{2011}, x_{n+1}=\frac{2}{1+x_n^2}; \forall n=0,1,2,...$$

1. Đặt $u_n=x_{2n}, \forall n=1,2,3,...$ Chứng minh dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.

2. Chứng minh rằng dãy (x_n) cũng có giới hạn hữu hạn.

Bài 12. Tìm $\lim u_n$ biết:

1. $u_n=\dfrac{n.\sqrt{1+3+5+...+(2n-1)}}{2n^2+1}$

2. $u_n=\lim\dfrac{\sqrt{1+2+...+n}-n}{\sqrt[3]{1^2+2^2+...+n^2}+2n}$

3. $u_n=\dfrac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$

4. $u_n=(1-\frac{1}{T_1})(1-\frac{1}{T_2})...(1-\frac{1}{T_n})$ trong đó $T_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

5. $u_n=\dfrac{2^3-1}{2^3+1}.\dfrac{3^3-1}{3^3+1}....\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$

6. $u_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{2^k}$

7. $u_n=q+2q^2+...+nq^n$ với $|q|<1$

8. $u_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k}$

9. $u_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

10. $u_n=\underbrace{\sqrt{2\sqrt{2...\sqrt{2}}}}_{\text{n dau can}}$.

Bài 13. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $x_n=2n+a\sqrt[3]{8n^3+1}\forall n\in N$, a là số thực cho trước.

1. Tìm điều kiện của a để dãy số trên có giới hạn hữu hạn.

2. Tìm điều kiện của a sao cho dãy số trên là dãy số tăng.

Bài 14. Cho số thực α và xét dãy số (x_n) với

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

1. Với $\alpha \in (1;2)$. Chứng minh $1 < x_n < 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và (x_n) là dãy số giảm.

2. Với $\alpha \in [1;+\infty)$. Tùy vào giá trị của α, tìm giới hạn của (x_n).

Bài 15.

1. Gọi (u_n) là dãy số xác định bởi $u_1 = \frac{4}{9}; u_{n+1} = -\frac{4}{9} + \frac{8}{9}\sqrt{3u_n}$. Tìm $\lim u_n$.

2. Giả sử $f(x)$ là hàm số được xác định trên tập số thực R và thỏa mãn bất phương trình: $9f(4x) \ge 4 + 4\sqrt{12f(3x) - 9f(4x)}$.

Chứng minh: $f(x) \ge u_n \ \forall n \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{R}$. Từ đó hãy suy ra $f(x) \ge \frac{4}{3}$.

3. Cho các dãy số $(x_n),(y_n),(z_n)$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} x_1 = a; y_1 = b; z_1 = c \\ x_n = \dfrac{y_{n-1} + z_{n-1}}{2}, y_n = \dfrac{z_{n-1} + x_{n-1}}{2}, z_n = \dfrac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} \end{cases}$$

Chứng minh rằng các dãy trên cùng hội tụ về giá trị $\frac{a+b+c}{3}$.

5. Cho $a > 2$ và dãy số (x_n) với $\begin{cases} x_1 = a \\ 2x_{n+1} = \sqrt{3x_n^2 + \dfrac{n+3}{n}} \end{cases}$.

a) Chứng minh : $x_n > 1$, với $n \in \mathbb{N}^*$

b)Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 16.

1. Dãy số (a_n) được xác định bởi : $\begin{cases} a_1 = a_2 = \dfrac{3}{2} \\ a_{n+1} = \dfrac{2}{a_n + a_{n-1}}, \ \forall n = 2,3,4.. \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy số (a_n) hội tụ và tìm giới hạn của dãy số đó.

2. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n(u_n+1)(u_n+2)(u_n+3)+1}; \ n = 1,2,.. \end{cases}.$$

Đặt $v_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i + 2}$. Tìm $\lim v_n$.

3. Cho dãy (x_n) : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_n = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}\right), \ \forall n \ge 2 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (y_n) xác định bởi $y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}$ có giới hạn và tìm giới hạn đó.

4. Cho $a,b \in \mathbb{N}^\star, (a,b) = 1; n \in \{ab+1, ab+2, ...\}$. Kí hiệu r_n là số cặp số $(u,v) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ sao cho $n = au + bv$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r_n}{n} = \frac{1}{ab}$.

Bài 17.

1. Cho dãy (x_n) : $x_1 = 1$; $x_{n+1} = \dfrac{(2+\cos 2\alpha)x_n + \cos^2\alpha}{(2-2\cos 2\alpha)x_n + 2 - \cos 2\alpha}$ trong đó α là số thực. Đặt $y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2x_i + 1} \ \forall n \ge 1$. Tìm α để dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

2. Cho c là một số thực dương. Dãy (x_n) được xây dựng như sau: $x_{n+1}=\sqrt{c-\sqrt{c+x_n}}$, $n=0,1,2..$ nếu các biểu thức dưới dấu căn không âm. Tìm tất cả các giá trị của c, để với mọi giá trị ban đầu $x_0\in(0;c)$, dãy (x_n) xác định với mọi n và tồn tại giới hạn hữu hạn.

ĐÁP ÁN

Bài 1

1. Ta có: $A=\lim\dfrac{2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}=\dfrac{2}{3}$.

2. Ta có: $B=\lim\dfrac{\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}}{\dfrac{n-\sqrt{3n^2+1}}{n}}=\lim\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}{1-\sqrt{3+\dfrac{1}{n^2}}}=\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$

3. Ta có: $C=\lim\dfrac{n^8(2+\dfrac{1}{n^2})^4.n^9(1+\dfrac{2}{n})^9}{n^{17}(1+\dfrac{1}{n^{17}})}=\lim\dfrac{(2+\dfrac{1}{n^2})^4.(1+\dfrac{2}{n})^9}{1+\dfrac{1}{n^{17}}}$

Suy ra $C=16$.

4. Ta có: $D=\lim\dfrac{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{3+\dfrac{2}{n^3}}\right)}{n\left(\sqrt[4]{2+\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2}{n^4}}-1\right)}=\dfrac{1-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{2}-1}$.

Bài 2

1. Ta có $A=\lim\left(\sqrt{n^2+6n}-n\right)=\lim\dfrac{n^2+6n-n^2}{\sqrt{n^2+6n}+n}$

$$=\lim\frac{6n}{\sqrt{n^2+6n}+n}=\lim\frac{6}{\sqrt{1+\dfrac{6}{n}}+1}=3$$

2. Ta có: $B=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+9n^2}-n\right)$

$$=\lim\frac{9n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3+9n^2\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+9n^2}+n^2}$$

$$=\lim\frac{9}{\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{9}{n}\right)^2}+\sqrt{1+\dfrac{9}{n}}+1}=3.$$

3. Ta có: $C=\lim\dfrac{3.2^n-3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\dfrac{3.\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-1}{2.\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+3}=-\dfrac{1}{3}$

4. Ta có: $D=\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)-\lim\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n\right)$

$$=\lim\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}-\lim\frac{2n^2}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3+2n^2}+n^2}$$

$$=\lim\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}-\lim\frac{2}{\sqrt[3]{(1+\frac{2}{n})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}+1}=\frac{1}{3}.$$

Bài 3

1. Ta có $A=\lim n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+1\right)=+\infty$

Do $\lim n=+\infty;\lim\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+1\right)=2$.

2. Ta có: $B=\lim n\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-1\right)=+\infty$

3. Chia cả tử và mẫu cho n^2 ta có được

$$C=\lim\frac{\sqrt[4]{\frac{3}{n^5}+\frac{1}{n^8}}-\frac{1}{n}}{\sqrt{2+\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^4}}+\frac{1}{n}}=0.$$

4. Ta xét ba trường hợp sau

- $k>p$. Chia cả tử và mẫu cho n^k ta có:

$$D=\lim\frac{a_k+\frac{a_{k-1}}{n}+...+\frac{a_0}{n^k}}{\frac{b_p}{n^{p-k}}+...+\frac{b_0}{n^k}}=\begin{cases}+\infty \text{ if } a_kb_p>0\\-\infty \text{ if } a_kb_p<0\end{cases}.$$

- $k=p$. Chia cả tử và mẫu cho n^k ta có:

$$D=\lim\frac{a_k+\frac{a_{k-1}}{n}+...+\frac{a_0}{n^k}}{b_k+...+\frac{b_0}{n^k}}=\frac{a_k}{b_k}.$$

- $k<p$. Chia cả tử và mẫu cho n^p : $D=\lim\frac{\frac{a_k}{n^{p-k}}+...+\frac{a_0}{n^p}}{b_p+...+\frac{b_0}{n^p}}=0$.

5.Ta có: $A=\lim n^3\left(1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)=+\infty$

6. $B=+\infty$

7. $C=\lim n^k\left(a_k+\frac{a_{k-1}}{n}+...+\frac{a_0}{n^k}\right)=\begin{cases}+\infty \text{ khi } a_k>0\\-\infty \text{ khi } a_k<0\end{cases}$

8. $D=+\infty$

9.Ta có: $E=\lim\frac{3+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}=\frac{3}{2}$

10. Ta có: $F=\lim\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)^7\left(2+\frac{1}{n}\right)^3}{\left(1+\frac{5}{n^2}\right)^5}=8$

11. Ta có: $H=\lim\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$

12. Ta có: $M=\lim\frac{1-n^2}{\sqrt[3]{(1-n^2-8n^3)^2}-2n\sqrt[3]{1-n^2-8n^3}+4n^2}=-\frac{1}{12}$

13. Ta có: $N=\lim\left(\sqrt{4n^2+1}-2n\right)-\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+n}-2n\right)$

Mà: $\lim\left(\sqrt{4n^2+1}-2n\right)=\lim\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}+2n}=0$

$\lim\left(\sqrt[3]{8n^2+n}-2n\right)=\lim\frac{n}{\sqrt[3]{(8n^2+n)^2}+2n\sqrt[3]{8n^2+n}+4n^2}=0$

Vậy $N=0$.

14. Ta có: $K=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-n\right)-3\lim\left(\sqrt{4n^2+n+1}-2n\right)$

Mà: $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-n\right)=\frac{1}{3}$; $\lim\left(\sqrt{4n^2+n+1}-2n\right)=\frac{1}{4}$

Do đó: $K=\frac{1}{3}-\frac{3}{4}=-\frac{5}{12}$

Bài 4.

1. $A=-\frac{2}{3}$ **2.** $B=\frac{4}{9}$ **3.** $C=\frac{1}{4}$ **4.** $D=0$

5. $E=+\infty$ **6.** $F=\frac{3}{\sqrt[3]{3}-1}$ **7.** $M=\lim\frac{6n}{\sqrt{n^2+6n}+n}=3$

8. $N=\lim\frac{3n^2+1}{\sqrt[3]{(n^3+3n^2+1)^2}+n.\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}+n^2}=1$.

9. $H=\lim n\left(\sqrt[3]{8n^3+n}-2n\right)-\lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)=-\frac{2}{3}$

10. $K=\lim\frac{3\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{2\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}=-\frac{1}{3}$.

Bài 5.

1. $A=\lim\frac{2+\frac{\sin 2n-1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}=2$

2. Ta có: $\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt{n^3+2n}}<\frac{\sqrt[n]{n^n}}{\sqrt{n^3+2n}}=\frac{n}{\sqrt{n^3+2n}}\to 0\Rightarrow B=0$

3. $C=\frac{1}{2}$ **4.** $D=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **5.** $E=-\infty$ **6.** $F=+\infty$

7. Xét các trường hợp

TH1: $k>p\Rightarrow H=-\infty$

TH 2: $k<p\Rightarrow H=+\infty$

TH 3: $k=p\Rightarrow H=0$.

8. $K=\frac{1}{2}$.

Bài 6

1. Ta có: $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$

Suy ra $u_n=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Rightarrow \lim u_n=1$

2. Ta có: $1^3+2^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{3}\right]^2$

Suy ra $u_n=\frac{n(n+1)^2}{3(3n^3+n+2)}\Rightarrow \lim u_n=\frac{1}{9}$.

3. Ta có: $1-\frac{1}{T_k}=1-\frac{2}{k(k+1)}=\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$

Suy ra $u_n=\frac{1}{3}.\frac{n+2}{n}\Rightarrow \lim u_n=\frac{1}{3}$.

4. Ta có $\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)[(k-1)^2+(k-1)+1]}$

Suy ra $\Rightarrow u_n=\frac{2}{3}.\frac{n^2+n+1}{(n-1)n}\Rightarrow \lim u_n=\frac{2}{3}$

5. Ta có: $u_n-\frac{1}{2}u_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}u_n=\frac{3}{2}-\frac{2n+1}{2^{n+1}}\Rightarrow \lim u_n=3$.

6. Ta có: $u_n-qu_n=q+q^2+q^3+...+q^n-nq^{n+1}$

$\Rightarrow (1-q)u_n=q\frac{1-q^n}{1-q}-nq^{n+1}$. Suy ra $\lim u_n=\frac{q}{(1-q)^2}$.

7. Ta có: $n\frac{n}{n^2+n}\le u_n\le n\frac{n}{n^2+1}\Rightarrow \frac{-n}{n^2+1}\le u_n-1\le\frac{-1}{n^2+1}$

$\Rightarrow |u_n-1|\le\frac{n}{n^2+1}\to 0\Rightarrow \lim u_n=1$.

Bài 7

1. Ta chia làm các trường hợp sau

TH 1: $n=k$, chia cả tử và mẫu cho n^k, ta được

$$A=\lim\frac{a_k+\frac{a_{k-1}}{n}+...+\frac{a_0}{n^k}}{b_p+\frac{b_{p-1}}{n}+...+\frac{b_0}{n^k}}=\frac{a_k}{b_p}.$$

TH 2: $k>p$, chia cả tử và mẫu cho n^k, ta được

$$A=\lim\frac{a_k+\frac{a_{k-1}}{n}+...+\frac{a_0}{n^k}}{\frac{b_p}{n^{k-p}}+\frac{b_{p-1}}{n^{k-p+1}}+...+\frac{b_0}{n^k}}=\begin{cases}+\infty \text{ khi } a_kb_p>0\\ -\infty \text{ khi } a_kb_p<0\end{cases}$$

TH 3: $k<p$, chia cả tử và mẫu cho n^p, ta được

$$A=\lim\frac{\frac{a_k}{n^{p-k}}+\frac{a_{k-1}}{n^{p-k+1}}+...+\frac{a_0}{n^p}}{b_p+\frac{b_{p-1}}{n}+...+\frac{b_0}{n^p}}=0.$$

2. Chia cả tử và mẫu cho n^2 ta có được:

$$B=\lim\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^6}}-4\sqrt{1+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}}}{\left(2+\frac{3}{n}\right)^2}=\frac{1-4}{4}=-\frac{3}{4}.$$

3. Ta có: $C=\lim\frac{n+1}{\sqrt{4n^2+n+1}+2n}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+2}=\frac{1}{4}$

4. Ta có: $D=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)-2\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-n\right)$

Mà: $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)=\lim\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$

$$=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-n\right)=\lim\frac{n^2-1}{\sqrt[3]{(n^3+n^2-1)^2}+n.\sqrt[3]{n^3+n^2-1}+n^2}$$

$$=\lim\frac{1-\frac{1}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^6}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}+1}=\frac{1}{3}$$

Vậy $D=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$.

Bài 8

1. Ta có $1,a,a^2,...,a^n$ là một cấp số nhân công bội a

$$1+a+a^2+...+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Tương tự $1+b+b^2+...+b^n=\frac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Suy ra $\lim I=\lim\frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}}=\frac{1-b}{1-a}$

(Vì $|a|<1,|b<1|\Rightarrow\lim a^{n+1}=\lim b^{n+1}=0$).

2. Từ công thức truy hồi ta có: $x_{n+1}>x_n$, $\forall n=1,2,...$

Nên dãy (x_n) là dãy số tăng.

Giả sử dãy (x_n) là dãy bị chặn trên, khi đó sẽ tồn tại $\lim x_n=x$

Với x là nghiệm của phương trình : $x=x^2+x\Leftrightarrow x=0<x_1$ vô lí

Do đó dãy (x_n) không bị chặn, hay $\lim x_n=+\infty$.

Mặt khác: $\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_n(x_n+1)}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_n+1}$

Suy ra: $\frac{1}{x_n+1}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}$

Dẫn tới: $S_n=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{n+1}}=2-\frac{1}{x_{n+1}}\Rightarrow \lim S_n=2-\lim\frac{1}{x_{n+1}}=2$

3. Ta có: $\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$ nên $x_k=1-\frac{1}{(k+1)!}$

Suy ra $x_k-x_{k+1}=\frac{1}{(k+2)!}-\frac{1}{(k+1)!}<0\Rightarrow x_k<x_{k+1}$

Mà: $x_{2011}<\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+...+x_{2011}^n}<\sqrt[n]{2011}x_{2011}$

Mặt khác: $\lim x_{2011}=\lim\sqrt[n]{2011}x_{2011}=x_{2011}=1-\frac{1}{2012!}$

Vậy $\lim u_n=1-\frac{1}{2012!}$.

4. Ta thấy $u_n>0,\ \forall n$

Ta có: $u_{n+1}^3=u_n^3+3+\frac{3}{u_n^3}+\frac{1}{u_n^6}$ (1)

Suy ra: $u_n^3>u_{n-1}^3+3\Rightarrow u_n^3>u_0^3+3n$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $u_{n+1}^3<u_n^3+3+\frac{1}{u_0^3+3n}+\frac{1}{\left(u_0^3+3n\right)^2}<u_n^3+3+\frac{1}{3n}+\frac{1}{9n^2}$

Do đó: $u_n^3<u_0^3+3n+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ (3)

Lại có: $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{(n-1)n}=2-\frac{1}{n}<2$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\le\sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}}<\sqrt{2n}$

Nên: $u_0^3+3n<u_n^3<u_0^3+3n+\frac{2}{9}+\frac{\sqrt{2n}}{3}$

Hay $3+\frac{u_0^3}{n}<\frac{u_n^3}{n}<3+\frac{u_0^3}{n}+\frac{2}{9n}+\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{n}}$.

Vậy $\lim\frac{u_n^3}{n}=3$.

5. Ta có: $u_n=\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

Nên $S_n=\frac{-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\Rightarrow \lim S_n=1-\sqrt{2}$

6. Ta có $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2}{2010}\Leftrightarrow\frac{u_{n+1}-u_n}{u_{n+1}.u_n}=\frac{u_n}{2010u_{n+1}}$

$\Leftrightarrow\frac{u_n}{u_{n+1}}=2010.\left(\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

Ta có $\sum\frac{u_n}{u_{n+1}}=2010(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_{n+1}})=2010(1-\frac{1}{u_{n+1}})$

Mặt khác ta chứng minh được: $\lim u_n=+\infty$.

Nên $\lim(\sum\frac{u_u}{u_{n+1}})=2010$.

7. Bằng quy nạp ta chứng minh được: $s_n=9-\frac{4n+9}{2^n}$

Mà $\lim\frac{n}{2^n}=0\Rightarrow\lim s_n=9$.

8. Ta chứng minh được: $u_n\ge 3;\forall n\in\mathbb{N}^*$, do đó

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n+2)^2(u_n-2)}{5}>0$$

Từ đó thấy (u_n) tăng.

Giả sử (u_n) bị chặn, khi đó tồn tại giới gạn hữu hạn, giả sử $\lim u_n=a$ và ta có:

$a=\frac{a(a+1)^2-8}{5}\Leftrightarrow a^3+2a^2-4a-8=0\Leftrightarrow a=\pm 2$ (loại)

Do đó $\lim u_n=+\infty$

Ta lại thấy rằng: $u_{n+1}=\frac{u_n(u_n+1)^2-8}{5}\Rightarrow\frac{u_n-2}{u_n^2+1}=\frac{1}{u_n+2}-\frac{1}{u_{n+1}+2},\forall n\in\mathbb{N}^*$

Vì vậy nên: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i-2}{u_i^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{u_1+2}-\frac{1}{u_{n+1}+2}\right)=\frac{1}{5}$.

Bài 9

1. Trước hết bằng quy nạp ta chứng minh được : $u_n>1,\ \forall n=1,2,...$

Ta có: $u_1=2>1$

Giả sử $u_n>1\Rightarrow u_{n+1}>\frac{1}{2011}+\frac{2010}{2011}=1$

Do đó: $u_n>1,\ \forall n=1,2,...$. Do $u_n>1\Rightarrow u_n^2>u_n$

Nên $u_{n+1}>\frac{u_n}{2011}+\frac{2010}{2011}u_n=u_n$, suy ra dãy (u_n) là dãy tăng

Giả sử dãy (u_n) bị chặn trên, khi đó tồn tại $\lim u_n=x>1$

Suy ra: $x=\frac{x^2}{2011}+\frac{2010}{2011}x\Rightarrow x=0$ (vô lí).

Từ đó ta có: $\lim u_n=+\infty$

2. Ta có:

$u_{n+1}-1=\frac{1}{2011}(u_n^2+2010u_n-2011)=\frac{1}{2011}(u_n-1)(u_n+2011)$

Suy ra: $\frac{1}{u_{n+1}-1}=\frac{2011}{2012}(\frac{1}{u_n-1}-\frac{1}{u_n+2011})$ (1)

$\frac{u_n}{u_{n+1}-1}=\frac{2011}{2012}(\frac{u_n}{u_n-1}-\frac{u_n}{u_n+2011})=\frac{2011}{2012}(\frac{1}{u_n-1}+\frac{2011}{u_n+2011})$

Mà từ (1) $\Rightarrow\frac{1}{u_k+2011}=\frac{1}{u_k-1}-\frac{2012}{2011}.\frac{1}{u_{k+1}-1}$

Do đó: $\frac{u_n}{u_{n+1}-1}=2012(\frac{1}{u_n-1}-\frac{1}{u_{n+1}-1})$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{u_{k+1}-1}=2012(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u_k-1}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{u_k-1})=2012(\frac{1}{u_1-1}-\frac{1}{u_{n+1}-1})$

Vậy $\lim\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{u_{k+1}-1}=\lim 2012(\frac{1}{u_1-1}-\frac{1}{u_{n+1}-1})=2012$.

Bài 10.

1. • Bằng quy nạy ta chứng minh: $x_n<4,\ \forall n$ (1)

Ta có: $x_1=1<4$ nên (1) đúng với $n=1$

Giả sử $x_k<4,\ \forall k\le n$, khi đó:

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n}+\sqrt{x_{n-1}}<\sqrt{4}+\sqrt{4}=4$$

Từ đó suy ra (1) đúng với mọi n.

• Ta chứng minh dãy (x_n) là dãy tăng

Ta có: $x_1<x_2$. Giả sử $x_k>x_{k-1},\ \forall k\le n$, khi đó:

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n}-\sqrt{x_{n-2}}>0\Rightarrow x_{n+1}>x_n$$

Từ đó suy ra dãy (x_n) hội tụ. Đặt $\lim x_n=x>0$, ta có x là nghiệm của phương trình : $x=\sqrt{x}+\sqrt{x}\Rightarrow x=4$

Vậy $\lim x_n=4$.

2. Ta chứng minh dãy (u_n) tăng và bị chặn trên

• Chứng minh dãy (u_n) tăng, tức là: $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ (1)

Áp dụng BĐT Cô si cho n số gồm

$\frac{1+(1+\frac{1}{n})+...+(1+\frac{1}{n})}{n+1}\ge\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n}\Rightarrow 1+\frac{1}{n+1}\ge\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n}$

Suy ra: $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\ge\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\Rightarrow u_{n+1}>u_n$, dãy (u_n) là dãy tăng.

• Chứng minh dãy (u_n) bị chặn trên bởi 3.

Ta chứng minh: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k}<\frac{n^2}{k^2}+\frac{n}{k}+1\quad ,1\le k\le n$ (2). Thật vậy:

* Với $k=1\Rightarrow VT(2)=1+\frac{1}{n}<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1=VP(2)$. Nên (2) đúng với $k=1$.

* Giải sử (2) đúng với $k=p,\ 1\le p\le n-1$, tức là:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p}<\frac{p^2}{n^2}+\frac{p}{n}+1\quad (3).$$

Ta chứng minh (2) đúng với $k=p+1$, tức là

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}<\frac{(p+1)^2}{n^2}+\frac{p+1}{n}+1\quad (4).$$

Thật vậy: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p}.\left(1+\frac{1}{n}\right)<\left(\frac{p^2}{n^2}+\frac{p}{n}+1\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$=\frac{p^2}{n^3}+\frac{p^2+p}{n^2}+\frac{p+1}{n}+1\le\frac{p}{n^2}+\frac{p^2+p}{n^2}+\frac{p+1}{n}+1$$

$$<\frac{p^2+2p+1}{n^2}+\frac{p+1}{n}+1=\frac{(p+1)^2}{n^2}+\frac{p+1}{n}+1.$$

Do vậy (2) được chứng minh.

Từ (2) ta suy ra $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \Rightarrow u_n < 3,\ \forall n$, suy ra dãy (u_n) bị chặn trên

Vì dãy (u_n) tăng và bị chặn trên nên dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.

3. Xét hàm số $f(x)=\frac{x^2-x+3}{x^2+x+1}$, ta có: $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

$$f(x)-\frac{5}{7}=\frac{2(x-2)(x-4)}{x^2+x+1};\ f(x)-2=\frac{-x^2-3x+1}{x^2+x+1}$$

Từ đó ta chứng minh được: $\frac{5}{7}\le u_n \le 2,\ \forall n=1,2,...$

Với mọi $x_1,x_2 \in \left[\frac{5}{7};2\right]; x_1 \ne x_2$, ta có:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{2\left[(x_1-1)(x_2-1)-3\right]}{(x_1^2+x_1+1)(x_2^2+x_2+1)}<0,\ \forall x_1,x_2 \in \left[\frac{5}{7};2\right]$$

Nên hàm f là hàm nghịch biến trên $\left(\frac{5}{7};2\right)$

Mà $u_1=2>\frac{137}{109}=u_3 \Rightarrow f(u_1)<f(u_3) \Rightarrow u_2<u_4$ …..

Từ đó ta chứng minh được dãy (u_{2n}) là dãy tăng và dãy (u_{2n+1}) là dãy số giảm. Cả hai dãy này cũng bị chặn nên hai dãy này tồn tại giới hạn: $\lim u_{2n}=x,\ \lim u_{2n+1}=y$ với $x,y \in \left[\frac{4}{5};2\right]$ (Do $u_4>\frac{4}{5}$ và $u_{2n+1}>1$).

Vì $\begin{cases} u_{2n}=f(u_{2n-1}) \\ u_{2n+1}=f(u_{2n}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=f(y) \\ y=f(x) \end{cases} \Rightarrow x-y=f(y)-f(x) \Leftrightarrow x+f(x)=y+f(y) \Leftrightarrow x=y$

(Do hàm số $g(x)=x+f(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{4}{5};2\right)$)

Thay $x=y$ vào hệ ta có: $x=f(x) \Leftrightarrow x^3+2x-3=0 \Leftrightarrow x=1$

Vậy dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim u_n=1$.

4. Xét dãy $(v_n): v_n=\max\{u_n,u_{n+1}\}$, ta có dãy (v_n) bị chặn

Từ giả thiết ta suy ra: $\max\{u_n,u_{n+1}\} \ge u_{n+2} \Rightarrow \max\{u_n,u_{n+1}\} \ge \max\{u_{n+1},u_{n+2}\}$

Do đó dãy (v_n) là dãy số giảm, từ đó suy ra tồn tại $\lim v_n = l$

Ta chứng minh: $\lim u_n = l$.

Vì $\lim v_n = l$ nên với mọi $\varepsilon>0$ nhỏ tùy ý, luôn tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $|v_n-l|<\frac{\varepsilon}{3} \Leftrightarrow l-\frac{\varepsilon}{3}<v_n<l+\frac{\varepsilon}{3},\ \forall n>n_0$

Với mọi $k>n_0+1$ ta có: $v_{k-1}=\max\{u_{k-1},u_k\}<l+\frac{\varepsilon}{3}$

Suy ra $u_{k-1}<l+\frac{\varepsilon}{3}$ (*)

Ta xét các trường hợp sau:

- $u_k>l-\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow l-\frac{\varepsilon}{3}<u_k \le v_k<l+\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |u_k-l|<\frac{\varepsilon}{3}$.
- $u_k \le l-\frac{\varepsilon}{3}$, suy ra $u_{k+1}>l-\frac{\varepsilon}{3}$

Khi đó: $u_k \ge 2u_{k+1}-u_{k-1}>2\left(l-\frac{\varepsilon}{3}\right)-\left(l+\frac{\varepsilon}{3}\right)=l-\varepsilon$

Dẫn tới: $l-\varepsilon<u_k \le v_k<l+\frac{\varepsilon}{3}<l+\varepsilon \Rightarrow |u_k-l|<\varepsilon$.

Vậy $\lim u_n = 1$.

5 • Xét dãy số $(a_n): \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + \sqrt{a_n^2 + 6}}{3}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Ta chứng minh $0 < a_n < \sqrt{2}$ và (a_n) là dãy tăng

Thật vậy: Ta có $0 < a_0 < \sqrt{2}$

Giả sử $0 < a_n < \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{a_n^2 + 6} < 2\sqrt{2} \Rightarrow 0 < \dfrac{a_n + \sqrt{a_n^2 + 6}}{3} < \sqrt{2}$

Hay $0 < a_{n+1} < \sqrt{2}$

Khi đó: $a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow 2a_n < \sqrt{a_n^2 + 6} \Leftrightarrow 0 < a_n < \sqrt{2}$ (đúng)

Từ đó ta kết luận được $\lim a_n = x$ và x thỏa:

$x = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 6}}{3} \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow \lim a_n = \sqrt{2}$.

Tiếp theo ta chứng minh: $a_n \le \min\{u_{2n}, u_{2n+1}\}$

Ta có: $a_0 = 1 \le \min\{u_0, u_1\}$

Giả sử: $a_n < \min\{u_{2n}, u_{2n+1}\} \Rightarrow a_n < u_{2n}, a_n < u_{2n+1}$

Khi đó: $u_{2n+2} = \dfrac{u_{2n+1} + \sqrt{u_{2n}^2 + 6}}{3} > \dfrac{a_n + \sqrt{a_n^2 + 6}}{3} = a_{n+1}$

$u_{2n+3} = \dfrac{u_{2n+2} + \sqrt{u_{2n+1}^2 + 6}}{3} > \dfrac{a_{n+1} + \sqrt{a_n^2 + 6}}{3} > a_{n+1}$

Vậy khẳng định vừa nêu đã được chứng minh.

• Xét dãy số $(b_n): \begin{cases} b_0 = 5 \\ b_{n+1} = \dfrac{b_n + \sqrt{b_n^2 + 6}}{3}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Tương tự ta chứng minh được dãy (b_n) giảm và bị chặn dưới bởi $\sqrt{2}$ và $\lim b_n = \sqrt{2}$. Đồng thời $b_n \ge \max\{u_{2n}, u_{2n+1}\}$.

Từ đó ta suy ra được: $\begin{cases} a_n < u_{2n} < b_n \\ a_n < u_{2n+1} < b_n \end{cases} \Rightarrow \lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = \sqrt{2}$

Vậy $\lim u_n = \sqrt{2}$.

6. Ta thấy $u_n > 0, \forall n$ và từ:

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 4u_n + 1}{u_n^2 + u_n + 1} = 1 + \frac{3u_n}{u_n^2 + u_n + 1} = 2 - \frac{(u_n - 1)^2}{u_n^2 + u_n + 1},$$

ta có: $1 < u_n < 2, \forall n$.

Xét hàm số: $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 1}, x \in (1;2)$ ta chứng minh được hàm f nghịch biến trên $(1;2)$.

Dãy số đó cho có thể viết dưới dạng: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), n \ge 1 \end{cases}$

Ta thấy: $u_1 = 1 < u_3 \Rightarrow f(u_1) > f(u_3)$

$\Rightarrow u_2 < u_4 \Rightarrow f(u_2) < f(u_4) \Rightarrow u_3 < u_5$.

Tiến hành tương tự, suy ra: $u_1 < u_3 < u_5 < ....$ suy ra dãy u_{2n+1} tăng và bị chặn trên bởi 2 nên có giới hạn, giả sử là $\alpha \in [1;2]$.

$u_2 > u_4 > u_6 > ...$ suy ra dãy u_{2n} giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên có giới hạn, giả sử là $\beta \in [1;2]$.

Ta có: $\begin{cases} u_{2n+1} = f(u_{2n}) \\ u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) \end{cases}$ .Chuyển qua giới hạn, ta có: $\begin{cases} \alpha = f(\beta) \\ \beta = f(\alpha) \end{cases}$.

$\Rightarrow \alpha - \beta = f(\beta) - f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha - \beta = \dfrac{\beta^2 + 4\beta + 1}{\beta^2 + \beta + 1} - \dfrac{\alpha^2 + 4\alpha + 1}{\alpha^2 + \alpha + 1}$

$\Leftrightarrow \alpha - \beta = 3\left(\dfrac{\beta}{\beta^2 + \beta + 1} - \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + \alpha + 1}\right)$

$\Leftrightarrow \alpha - \beta = \dfrac{3(\alpha - \beta)(\alpha\beta - 1)}{(\alpha^2 + \alpha + 1)(\beta^2 + \beta + 1)}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha - \beta = 0 \\ 3(\alpha\beta - 1) = (\alpha^2 + \alpha + 1)(\beta^2 + \beta + 1) \end{array}\right.$

Ta thấy phương trình thứ hai không có giá trị $\alpha, \beta \in [1;2]$ thỏa mãn $\alpha = \beta = t$.

Do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = t$, hai dãy con đó có cùng giới hạn là t.

Ta thấy, t phải thỏa mãn đẳng thức: $t = \dfrac{t^2 + 4t + 1}{t^2 + t + 1} \Leftrightarrow t^3 - 3t = 1$ (*).

Ta sẽ chứng minh rằng nghiệm $|t| \le 2$. Đặt $t = 2\cos\varphi,\ \varphi \in [0;2\pi]$, thay vào phương trình (*) ở trên:

$8\cos^3\varphi - 6\cos\varphi = 1 \Leftrightarrow \cos 3\varphi = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = \pm\dfrac{\pi}{9} + k\dfrac{2\pi}{3}$.

Do $\varphi \in [0;2\pi]$ nên: $\varphi = \dfrac{\pi}{9}; \dfrac{5\pi}{9}; \dfrac{7\pi}{9}$, tương ứng với các nghiệm của (*) là: $t = 2\cos\dfrac{\pi}{9}; 2\cos\dfrac{5\pi}{9}; 2\cos\dfrac{7\pi}{9}$.

Phương trình (*) đó có đủ 3 nghiệm nên nó không có nghiệm $|t| > 2$.

Trong các nghiệm này, chỉ có $t = 2\cos\dfrac{\pi}{9} \in [1;2]$ thỏa mãn và đây cũng chính là giới hạn cần tìm.

Vậy dãy số u_n có giới hạn hữu hạn và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\cos\dfrac{\pi}{9}$.

7. Trước hết ta chứng minh $x_n < 7, \forall n \in \mathbb{N}^*$ theo qui nạp

Ta có $x_1 = 1 < 7$ nên khẳng định đúng khi $n = 1$.

Giả sử khẳng định đúng đến một số tự nhiên $n > 1$,

suy ra $x_{n-1} < 7$ và $x_n < 7 \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{4x_n + 3x_{n-1}} < 7$.

Khẳng định được chứng minh.

Xét dãy $y_1 = 1; y_{n+1} = \sqrt{7y_n}$. Dễ dàng chứng minh được (y_n) tăng và bị chặn trên bởi 7. Từ đó tìm được $\lim y_n = 7$.

Tiếp theo ta chứng minh $y_n \le \min\{x_{2n-1}; x_{2n}\}; n = 1, 2, ...$.

Hiển nhiên khẳng định đúng khi $n = 1$.

giả sử khẳng định đúng đến $n > 1$, tức là: $y_n \le x_{2n-1}; y_n \le x_{2n}$

$\Rightarrow y_{n+1} = \sqrt{7y_n} \le \sqrt{4x_{2n} + 3x_{2n-1}} = x_{2n+1}$ và

$x_{2n+2} = \sqrt{4x_{2n+1} + 3x_{2n}} \ge \sqrt{4y_{n+1} + 3y_n} \ge \sqrt{7y_n} = y_{n+1}$

(do $y_{n+1} > y_n$) suy ra $y_{n+1} \le \min\{x_{2n+1}; x_{2n}\}$.

Vậy khẳng định được chứng minh.

Từ đó suy ra: $\begin{cases} y_n < x_{2n} < 7 \\ y_n < x_{2n+1} < 7 \end{cases} \Rightarrow \lim x_{2n} = \lim x_{2n+1} = 7$

Vậy $\lim x_n = 7$.

Bài 11.

1. Xét hàm số $f(x)=\frac{2}{1+x^2}$, $g(x)=f\left(f(x)\right)=\frac{2(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2+4}$

Ta có: $u_{2n}=g(u_{2n-2}),\ u_{2n+1}=g(u_{2n-1})$

Ta chứng minh được: $x_{2n}<1<x_{2n+1},\ \forall n$ (1)

Ta có: $x_2=\frac{2}{1+2011}=\frac{1}{1006}<1<\sqrt{2011}=x_1$

Giả sử $x_{2n-2}<1<x_{2n-1}$, ta có: $x_{2n}=\frac{2}{1+x_{2n-1}^2}<1,\ x_{2n+1}=\frac{2}{1+x_{2n}^2}>1$

Vậy (1) đúng.

Mặt khác: $u_{2n}-u_{2n-2}=g(u_{2n-2})-u_{2n-2}$ (2)

Mà: $g(x)-x=-\frac{(x-1)^3(x^2+x+2)}{(1+x^2)^2+4}$ (3)

Từ (1), (2),(3) ta suy ra được dãy $(u_n):u_n=x_{2n}$ là dãy tăng và bị chặn trên bởi 1 nên dãy (u_n) có giới hạn.

2. Theo chứng minh trên ta có dãy (x_{2n}) hội tụ tới l_1

Tương tự ta cũng chứng minh được dãy (x_{2n+1}) cũng hội tụ tới giá trị l_2.

Vì $\begin{cases}u_{2n}=g(u_{2n-2})\\u_{2n+1}=g(u_{2n-1})\end{cases}$ nên l_1,l_2 là nghiệm của phương trình

$g(x)-x=0\Leftrightarrow x=1$, do đó: $l_1=l_2=1$

Vậy dãy (x_n) hội tụ và $\lim x_n=1$.

Bài 12.

1. Ta có: $1+3+5+...+2n-1=n^2$ nên $\lim u_n=\frac{1}{2}$

2. Ta có: $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ và $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Nên $\lim u_n=\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{2}}$

3. Ta có: $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$

Suy ra $u_n=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Rightarrow\lim u_n=1$

4. Ta có: $1-\frac{1}{T_k}=1-\frac{2}{k(k+1)}=\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$

Suy ra $u_n=\frac{1}{3}.\frac{n+2}{n}\Rightarrow\lim u_n=\frac{1}{3}$.

5. Ta có $\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)[(k-1)^2+(k-1)+1]}$

Suy ra $u_n=\frac{2}{3}.\frac{n^2+n+1}{(n-1)n}\Rightarrow\lim u_n=\frac{2}{3}$

6. Ta có: $u_n-\frac{1}{2}u_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$

$\Rightarrow\frac{1}{2}u_n=\frac{3}{2}-\frac{2n+1}{2^{n+1}}\Rightarrow\lim u_n=3$.

7. Ta có: $u_n-qu_n=q+q^2+q^3+...+q^n-nq^{n+1}$

$\Rightarrow (1-q)u_n = q\dfrac{1-q^n}{1-q} - nq^{n+1}$. Suy ra $\lim u_n = \dfrac{q}{(1-q)^2}$.

8. Ta có: $n\dfrac{n}{n^2+n} \le u_n \le n\dfrac{n}{n^2+1} \Rightarrow \dfrac{-n}{n^2+1} \le u_n - 1 \le \dfrac{-1}{n^2+1}$

$\Rightarrow |u_n - 1| \le \dfrac{n}{n^2+1} \to 0 \Rightarrow \lim u_n = 1$.

9. Ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}} < \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, $k = 1,2,...,n$

Suy ra $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} < u_n < \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

Mà $\lim \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$ nên suy ra $\lim u_n = 1$.

10. Ta có: $u_n = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}} = 2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$,

nên $\lim u_n = \lim 2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2$.

Bài 13.

1. • Nếu $a \ge 0$ thì ta có: $\lim x_n = +\infty$

• Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ a \ne -1 \end{cases}$ thì :

$\lim x_n = \lim n\left(2 + 2a\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{8n^3}}\right) = \begin{cases} +\infty \text{ khi } a > -1 \\ -\infty \text{ khi } a < -1 \end{cases}$

• Nếu $a = -1$ ta có: $\lim x_n = 0$

Vậy $a = -1$ là giá trị cần tìm.

2. Dãy số (x_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow x_{n+1} \ge x_n$, $\forall n$

$\Leftrightarrow 2 + a\sqrt[3]{8(n+1)^3+1} \ge a.\sqrt[3]{8n^3+1} \Leftrightarrow a \ge \dfrac{2}{\sqrt[3]{8n^3+1} - \sqrt[3]{8(n+1)^3+1}}$ (1)

Ta có: $\dfrac{2}{\sqrt[3]{8n^3+1} - \sqrt[3]{8(n+1)^3+1}} < -1$ và $\lim \dfrac{2}{\sqrt[3]{8n^3+1} - \sqrt[3]{8(n+1)^3+1}} = -1$

Nên (*) đúng với mọi $n \Leftrightarrow a \ge -1$.

Bài 14.

1. Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 2.$, ta có $1 < f(x) < 2, \ \forall x \in (1;2)$

Vậy $x_1 = \alpha \in (1;2) => x_n \in (1;2), \forall n \in \mathbb{N}^*$ (chứng minh bằng quy nạp)

Lại có $x_{n+1} - x_n = (x_n - 1)(x_n - 2) < 0$ (Do $x_n \in (1;2)$)

Nên dãy (x_n) là dãy giảm nên tồn tại giới hạn hữu hạn.

2. • Nếu $\alpha = 1 \Rightarrow x_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim x_n = 1$

• Nếu $\alpha = 2 \Rightarrow x_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim x_n = 2$

• Nếu $\alpha \in (1;2) \Rightarrow (x_n)$ là dãy giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn . Gọi

$L = \lim x_n \Rightarrow L = L^2 - 2L + 2 \Leftrightarrow L = 1(n), L = 2(l)$

• Nếu $\alpha > 2$,ta chứng minh được $x_n > 2, \forall n$ và (x_n) tăng.

Khi đó giả sử x_n bị chặn trên thì dãy sẽ có giới hạn là $L = 1, L = 2$ (cả hai giá trị này đều loại do x_n tăng và $x_1 > 2$).

Vậy trường hợp này $\lim x_n = +\infty$.

Bài 15.

1. Ta có $0<u_1<u_2\Rightarrow u_3=-\frac{4}{9}+\frac{8}{9}\sqrt{3u_1}<-\frac{4}{9}+\frac{8}{9}\sqrt{3u_2}=u_3$

nên dãy (u_n) là dãy tăng.

Dễ dàng chứng minh được $u_n<\frac{4}{3},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Từ đó tính được $\lim u_n=\frac{4}{3}$.

2. Để chứng minh $f(x)\ge u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\mathbb{R}$ ta cần chứng minh $f(x)\ge\frac{4}{9}$ và $f(x)\ge-\frac{4}{9}+\frac{8}{9}\sqrt{3f(ax)}$.

Thật vậy, từ $9f(4x)\ge 4+4\sqrt{12f(3x)-9f(4x)},\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow 9f(4x)\ge 4,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)\ge\frac{4}{9}$ (1)

Lại có $9f(4x)-4\ge 4\sqrt{12f(3x)-9f(4x)}$

$\Rightarrow(9f(4x)+4)^2\ge\left(8\sqrt{3f(3x)}\right)^2$

$\Rightarrow f(4x)\ge-\frac{4}{9}+\frac{8}{9}\sqrt{3f(3x)}\Rightarrow f(x)\ge-\frac{4}{9}+\frac{8}{9}\sqrt{3f(\frac{3}{4}x)}$ (2)

Bây giờ ta chứng minh $f(x)\ge u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\mathbb{R}$ theo qui nạp.

- $n=1$, thì theo (1)có $f(x)\ge\frac{4}{9}=u_1$ nên khẳng định đúng.
- Giả sử $f(x)\ge u_n$, và $\forall x\in\mathbb{R}$ thì theo (2)ta có

$$f(x)\ge-\frac{4}{9}+\frac{8}{9}\sqrt{3f(\frac{3}{4}x)}\ge-\frac{4}{9}+\frac{8}{9}\sqrt{3u_n}=u_{n+1}$$

theo qui nạp ta có đpcm.

Từ $f(x)\ge u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*,x\in\mathbb{R}$ lấy giới hạn hai vế khi $n\to+\infty$ thu được $f(x)\ge\frac{4}{3},\forall x\in\mathbb{R}$.

3. Ta có $x_{n+1}+y_{n+1}+z_{n+1}=x_n+y_n+z_n=...=a+b+c$

mặt khác $x_{n+1}-y_{n+1}=(-\frac{1}{2})(x_n-y_n)=...=(-\frac{1}{2})^n(a-b)$

$\Rightarrow\lim(x_n-y_n)=0$

Tương tự ta có $\lim(y_n-z_n)=0,\lim(z_n-x_n)=0$

Ta lại có $\left|x_n-\frac{a+b+c}{3}\right|=\left|x_n-\frac{x_n+y_n+z_n}{3}\right|$

$$=\left|\frac{x_n-y_n}{3}+\frac{x_n-z_n}{3}\right|$$

Từ đó ta có $0\le\left|x_n-\frac{a+b+c}{3}\right|\le\left|\frac{x_n-y_n}{3}\right|+\left|\frac{x_n-z_n}{3}\right|$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{a+b+c}{3}$. Từ đó ta có đpcm.

4. Ta chứng minh $x_n^2>1+\frac{3}{n}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

Ta có $x_1^2=a^2>4$ nên khẳng định đúng với $n=1$

Giả sử $x_k>1+\frac{3}{k}$ với mọi $k\le n$

Ta có: $x_{n+1}^2=\frac{1}{4}(3x_n^2+1+\frac{3}{n})>\frac{1}{4}(4+\frac{12}{n})>1+\frac{3}{n+1}$

Theo nguyên lí quy nạp khẳng định trên được chứng minh.

a) Theo chứng minh trên suy ra $x_n^2 > 1 \Rightarrow x_n > 1$.

b) Ta có: $x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\sqrt{3x_n^2 + 1 + \frac{3}{n}} > x_n - \frac{1}{2}\sqrt{3x_n^2 + x_n^2} = 0$

Nên dãy (x_n) là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên (x_n) có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim x_n = x$ ta có x là nghiệm của phương trình

$2x = \sqrt{3x^2 + 1} \Leftrightarrow x = 1$.

Bài 16.

1. Ta xét hai dãy :

$$M_n = \max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\} \text{ và } m_n = \min\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\}$$

Ta chứng minh $\{M_n\}$ là dãy số giảm và $\{m_n\}$ là dãy số tăng.

Thật vậy, ta sẽ chứng minh $a_{n+4} \le \max\{a_{n+1}, a_{n+3}\}$.

Thật vật nếu $a_{n+4} \ge a_{n+3}$ thì $\frac{2}{a_{n+3} + a_{n+2}} \ge a_{n+3}$

Suy ra : $2 \ge (a_{n+3} + a_{n+2})a_{n+3}$.

Khi đó: $a_{n+1} = \frac{2}{a_{n+3}} - a_{n+2} = \frac{2}{a_{n+3}} - \frac{2}{a_{n+2} + a_{n+3}} - a_{n+2} + a_{n+4}$

$= 2.\frac{a_{n+2}}{(a_{n+3} + a_{n+2})a_{n+3}} - a_{n+2} + a_{n+4} \ge a_{n+4}$

Từ đây suy ra $M_{n+1} = a_{n+1}$ hoặc a_{n+2} hoặc a_{n+3} và rõ ràng khi đó

$$M_n = \max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\} > M_{n+1}.$$

Do đó dãy $\{M_n\}$ là dãy giảm.

Tương tự ta chứng minh được dãy $\{m_n\}$ tăng.

Hai dãy số này đều bị chặn nên hội tụ.

Cuối cùng, ta chỉ còn cần chứng minh hai giới hạn bằng nhau.

Suy ra dãy (a_n) hội tụ và $\lim a_n = 1$.

2. Ta có: $u_{n+1} = \sqrt{(u_n^2 + 3u_n)(u_n^2 + 3u_n + 2) + 1} = \sqrt{(u_n^2 + 3u_n + 1)^2}$

$= u_n^2 + 3u_n + 1$

Suy ra: $u_{n+1} + 1 = (u_n + 1)(u_n + 2) \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1} + 1} = \frac{1}{u_n + 1} - \frac{1}{u_n + 2}$

Suy ra: $\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{u_n + 1} - \frac{1}{u_{n+1} + 1}$

Do đó, suy ra: $v_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{u_i + 1} - \frac{1}{u_{i+1} + 1}\right) = \frac{1}{u_1 + 1} - \frac{1}{u_{n+1} + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{u_{n+1} + 1}$

Mặt khác, từ $u_{n+1} = u_n^2 + 3u_n + 1$ ta suy ra: $u_{n+1} > 3^n$.

Nên $\lim \frac{1}{u_{n+1} + 1} = 0$. Vậy $\lim v_n = \frac{1}{2}$.

3. Ta có: $x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} - x_{n-1}\right) = \frac{1}{2}\frac{x_{n-1}^2 + 3x_{n-1}}{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}} > 0$

Nên dãy (x_n) là dãy tăng.

Giả sử dãy (x_n) bị chặn trên, suy ra tồn tại $\lim x_n = x > 0$

Ta có phương trình: $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2 + 4x} + x\right) \Leftrightarrow x = 0$ (vô lí)

Do vậy, ta có được: $\lim x_n = +\infty$.

Từ công thức truy hồi, ta có được:

$$(2x_n - x_{n-1})^2 = x_{n-1}^2 + 4x_{n-1} \Leftrightarrow x_n^2 = (x_n + 1)x_{n-1}$$

Dẫn tới: $\frac{1}{x_{n-1}} = \frac{x_n + 1}{x_n^2} = \frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{x_n} \Rightarrow \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}$ với $\forall n \ge 2$

Suy ra: $y_n = \frac{1}{x_1^2} + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}\right) + ... + \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}\right) = 6 - \frac{1}{x_n}$

Mà $\lim x_n = +\infty \Rightarrow \lim \frac{1}{x_n} = 0$

Vậy $\lim y_n = 6$.

4. Xét phương trình $au + bv = n$ (1).

Gọi (u_0, v_0) là một nghiệm nguyên dương của (1). Giả sử (u, v) là một nghiệm nguyên dương khác (u_0, v_0) của (1).

Ta có $au_0 + bv_0 = n, au + bv = n$ suy ra $a(u - u_0) + b(v - v_0) = 0$ do đó tồn tại k nguyên dương sao cho

$u = u_0 + kb, v = v_0 - ka$. Do v là số nguyên dương nên $v_0 - ka \ge 1 \Leftrightarrow k \le \frac{v_0 - 1}{a}$. (2)

Ta nhận thấy số nghiệm nguyên dương của phương trình (1) bằng số các số k nguyên dương cộng với 1. Do đó

$r_n = \left[\frac{v_0 - 1}{a}\right] + 1 = \left[\frac{n}{ab} - \frac{u_0}{b} - \frac{1}{a}\right] + 1$.

Từ đó ta thu được bất đẳng thức sau: $\frac{n}{ab} - \frac{u_0}{b} - \frac{1}{a} \le r_n \le \frac{n}{ab} - \frac{u_0}{b} - \frac{1}{a} + 1$.

Từ đó suy ra : $\frac{1}{ab} - \frac{u_0}{nb} - \frac{1}{na} \le \frac{r_n}{n} \le \frac{1}{ab} - \frac{u_0}{nb} - \frac{1}{na} + \frac{1}{n}$.

Từ đây áp dụng nguyên lý kẹp ta có ngay $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r_n}{n} = \frac{1}{ab}$.

Bài 17.

1. Ta có $\frac{1}{2x_{n+1} + 1} = \frac{2\sin^2\alpha}{3} + \frac{1}{3(2x_n + 1)} \Rightarrow \frac{1}{2x_n + 1} = \frac{1}{3^n} + (1 - \frac{1}{3^{n-1}})\sin^2\alpha$

$$\Rightarrow y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2x_i + 1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3^i} + \sin^2\alpha \sum_{i=1}^{n} (1 - \frac{1}{3^{i-1}})$$
$$= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n}) + [n - \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{3^n})]\sin^2\alpha$$

Vì $\lim \frac{1}{3^n} = 0$ nên dãy (y_n) có giới hạn hữu hạn $\Leftrightarrow \sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = k\pi$

Khi đó $\lim y_n = \frac{1}{2}$.

2. Ta có x_1 xác định khi $c > \sqrt{c + x_0} \Leftrightarrow c(c-1) > x_0 \Rightarrow c(c-1) \ge c \Rightarrow c \ge 2$

Ta chứng minh với $c > 2$ thì dãy (x_n) hoàn toàn xác định.

Vì $\begin{cases} c > 2 \\ x_0 < c \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x_0 + c} < \sqrt{2c} < c \Rightarrow c - \sqrt{c + x_0} > 0 \Rightarrow x_1$ xác định.

Giả sử x_k được xác định. Khi đó $0 < x_k < \sqrt{c} < c \Rightarrow \sqrt{c + x_k} < \sqrt{2c} < c$

Suy ra $c - \sqrt{c + x_k} > 0 \Rightarrow x_{k+1}$ xác định.

Gọi $a > 0$ là nghiệm của phương trình : $x^2 + x + 1 - c = 0$.

Ta chứng minh: $\lim x_n = a$. Thật vậy:

$$\left|x_{n+1}-a\right|=\frac{\left|c-\sqrt{c+x_n}-a^2\right|}{\sqrt{c-\sqrt{c+x_n}}+a}=\frac{\left|a+1-\sqrt{c+x_n}\right|}{\sqrt{c-\sqrt{c+x_n}}+a}$$

$$<\frac{\left|(a+1)^2-(c+x_n)\right|}{a\left(a+1+\sqrt{c+x_n}\right)}<\frac{\left|x_n-a\right|}{a(a+1+\sqrt{c})}=\frac{\left|x_n-a\right|}{c-1+a\sqrt{c}}$$

Suy ra: $\left|x_{n+1}-a\right|<\dfrac{\left|x_1-a\right|}{\left(c-1+a\sqrt{c}\right)^n}$

Do $c-1+a\sqrt{c}>1\Rightarrow \lim\dfrac{1}{\left(c-1+a\sqrt{c}\right)^n}=0$.

Do đó $\lim x_n=a=\dfrac{-1+\sqrt{4c-3}}{2}$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Ta có $0\le\left|\dfrac{\sin 5n}{3n}\right|\le\dfrac{1}{n}$, mà $\lim\dfrac{1}{n}=0$ nên $\lim\dfrac{\sin 5n}{3n}=0$, do đó $\lim\left(\dfrac{\sin 5n}{3n}-2\right)=-2$. **Chọn A.**

Nhận xét : Có thể dùng MTCT để tính (có thể chính xác hoặc gần đúng) giới hạn như sau (các bài sau có thể làm tương tự) :

Nhập $\dfrac{\sin(5X)}{3X}-2$.

Bấm CALC và nhập 9999999999 (một số dòng MTCT khi bấm nhiều số « 9 » thì nó báo lỗi, khi đó ta cần bấm ít số « 9 » hơn.

Bấm « = » ta được kết quả (có thể gần đúng), sau đó chọn đáp án có giá trị gần đúng với kết quả hiện trên MTCT.

Câu 2. Ta có $\dfrac{n-2\sqrt{n}\sin 2n}{2n}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{n}\sin 2n}{n}$.

Điều kiện bài toán trở thành $\lim\dfrac{\sqrt{n^k}\cos\frac{1}{n}}{n}=0$.

Ta có $\lim\cos\dfrac{1}{n}=\cos 0=1$ nên bài toán trở thành tìm k sao cho

$\lim\dfrac{\sqrt{n^k}}{n}=\lim n^{\frac{k}{2}-1}=0\Leftrightarrow\dfrac{k}{2}-1<0\Leftrightarrow k<2\xrightarrow[k\in\mathbb{N}^*,k=3l]{}$ không tồn tại k (do k nguyên dương và chẵn). **Chọn A.**

Câu 3. Ta có $0\le\left|\dfrac{3\sin n+4\cos n}{n+1}\right|\le\dfrac{7}{n+1}\le\dfrac{7}{n}\to 0\longrightarrow\lim\dfrac{3\sin n+4\cos n}{n+1}=0$. **Chọn B.**

Câu 4. Ta có

$$0\le\left|\frac{n\cos 2n}{n^2+1}\right|\le\frac{n}{n^2+1}\le\frac{1}{n}\to 0\longrightarrow\lim\frac{n\cos 2n}{n^2+1}=0\longrightarrow\lim\left(5-\frac{n\cos 2n}{n^2+1}\right)=5.$$ **Chọn C.**

Câu 5. Ta có $\lim\left(n^2\sin\dfrac{n\pi}{5}-2n^3\right)=\lim n^3\left(\dfrac{1}{n}.\dfrac{\sin n\pi}{5}-2\right)$. Vì

$$\begin{cases} \lim n^3 = +\infty \\ 0 \le \left|\frac{1}{n}.\frac{\sin n\pi}{5}\right| \le \frac{1}{n} \to 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lim n^3 = +\infty \\ \lim\left(\frac{1}{n}.\frac{\sin n\pi}{5} - 2\right) = -2 < 0 \end{cases} \longrightarrow \lim n^3\left(\frac{1}{n}.\frac{\sin n\pi}{5} - 2\right) = -\infty.$$

Chọn A.

Câu 6. Ta có $0 \le \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| \le \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n} \to 0 \longrightarrow \lim\frac{(-1)^n}{n+1} = 0 \longrightarrow \lim\left(4 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right) = 4.$

Chọn C.

Câu 7. Ta có $\begin{cases} 0 \le |u_n| \le \frac{1}{n^2+1} \le \frac{1}{n} \to 0 \\ 0 \le |v_n| \le \frac{1}{n^2+2} \le \frac{1}{n} \to 0 \end{cases} \longrightarrow \lim u_n = \lim v_n = 0 \longrightarrow \lim(u_n + v_n) = 0.$

Chọn B.

Chú ý : Cho $P(n), Q(n)$ lần lượt là các đa thức bậc m, k theo biến n:

$$P(x) = a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0 \ (a_m \ne 0)$$
$$Q(n) = b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0 \ (b_k \ne 0)$$

Khi đó $\lim\frac{P(n)}{Q(n)} = \lim\frac{a_m n^m}{b_k n^k}$, viết tắt $\frac{P(n)}{Q(n)} \sim \frac{a_m n^m}{b_k n^k}$, ta có các trường hợp sau :

Nếu « bậc tử » $<$ « bậc mẫu ($m < k$) thì $\lim\frac{P(n)}{Q(n)} = 0.$

Nếu « bậc tử » $=$ « bậc mẫu ($m = k$) thì $\lim\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_m}{b_k}.$

Nếu « bậc tử » $>$ « bậc mẫu ($m > k$) thì $\lim\frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} +\infty \ khi \ a_m b_k > 0 \\ -\infty \ khi \ a_m b_k < 0 \end{cases}.$

Để ý rằng nếu $P(n), Q(n)$ có chứa « căn » thì ta vẫn tính được bậc của nó. Cụ thể $\sqrt[m]{n^k}$ tì có bậc là $\frac{k}{n}$. Ví dụ $\sqrt{n}$ có bậc là $\frac{1}{2}$, $\sqrt[3]{n^4}$ có bậc là $\frac{4}{3}$,...

Trong các bài sau ta có thể dùng dấu hiệu trên để chỉ ra kết quả một cách nhanh chóng !

Câu 8. Ta có $\lim\frac{-3}{4n^2 - 2n + 1} = \lim\frac{\frac{-3}{n^2}}{4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{4} = 0.$ **Chọn C.**

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » $<$ « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Câu 9. Ta có $\lim\frac{n + 2n^2}{n^3 + 3n - 1} = \lim\frac{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}}{1 + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0.$ **Chọn D.**

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » $<$ « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Câu 10. Ta có $\lim \frac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1}=\lim \frac{\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}}{4+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}=\frac{0}{4}=0.$ **Chọn B.**

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » $<$ « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Câu 11. Ta có $\lim \frac{n\sqrt{n}+1}{n^2+2}=\lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}=\frac{0}{1}=0.$ **Chọn D.**

Giải nhanh : $\frac{n\sqrt{n}+1}{n^2+2}\sim \frac{n\sqrt{n}}{n^2}=\frac{1}{\sqrt{n}}\longrightarrow 0.$

Câu 12. Ta có $\lim \frac{v_n}{u_n}=\lim \frac{n+1}{n+2}=\lim \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{1}{1}=1.$ **Chọn A.**

Giải nhanh : $\frac{n+1}{n+2}\sim \frac{n}{n}=1.$

Câu 13. Ta có $\lim u_n=\lim \frac{an+4}{5n+3}=\lim \frac{a+\frac{4}{n}}{5+\frac{3}{n}}=\frac{a}{5}.$ Khi đó

$$\lim u_n=2\Leftrightarrow \frac{a}{5}=2\Leftrightarrow a=10\longrightarrow$$ **Chọn A.**

Giải nhanh : $2\sim \frac{an+4}{5n+3}\sim \frac{an}{5n}=\frac{a}{5}\Leftrightarrow a=10.$

Câu 14. Ta có $\lim u_n=\lim \frac{2n+b}{5n+3}=\lim \frac{2+\frac{b}{n}}{5+\frac{3}{n}}=\frac{2}{5}\ (\forall b\in \mathbb{R})\longrightarrow$ **Chọn A.**

Giải nhanh : $\frac{2n+b}{5n+3}\sim \frac{2n}{5n}=\frac{2}{5}$ với mọi $b\in \mathbb{R}.$

Câu 15. Ta có $L=\lim \frac{n^2+n+5}{2n^2+1}=\lim \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}\longrightarrow$ **Chọn B.**

Giải nhanh: $\frac{n^2+n+5}{2n^2+1}\sim \frac{n^2}{2n^2}=\frac{1}{2}.$

Câu 16. $2=\lim u_n=\lim\dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}=\lim\dfrac{4+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{a+\dfrac{5}{n^2}}=\dfrac{4}{a}\ (a\neq 0)\Leftrightarrow a=2.$ **Chọn D.**

Giải nhanh : $2\sim\dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}\sim\dfrac{4n^2}{an^2}=\dfrac{4}{a}\Leftrightarrow a=2.$

Câu 17. $L=\lim\dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n}-3}{2+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}}=\dfrac{-3}{2}\longrightarrow$ **Chọn A.**

Giải nhanh: $\dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}\sim\dfrac{-3n^3}{2n^3}=-\dfrac{3}{2}.$

Câu 18. $L=\lim\dfrac{5n^2-3an^4}{(1-a)n^4+2n+1}=\lim\dfrac{\dfrac{5}{n^2}-3a}{(1-a)+\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}=\dfrac{-3a}{(1-a)}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<0\\a>1\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 19. Ta có

$$L=\lim\frac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)}=\lim\frac{n^3\left(\dfrac{2}{n^2}-1\right).n^2\left(3+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n\left(2-\dfrac{1}{n}\right).n^4\left(1-\dfrac{7}{n^4}\right)}=\lim\frac{\left(\dfrac{2}{n^2}-1\right)\left(3+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\left(2-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{7}{n^4}\right)}=\frac{-1.3}{2.1}=-\frac{3}{2}.$$

Chọn A.

Giải nhanh: $\dfrac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)}\sim\dfrac{-n^3.3n^2}{2n.n^4}=-\dfrac{3}{2}.$

Câu 20. $L=\lim\dfrac{(n^2+2n)(2n^3+1)(4n+5)}{(n^4-3n-1)(3n^2-7)}=\lim\dfrac{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n^3}\right)\left(4+\dfrac{5}{n}\right)}{\left(1-\dfrac{3}{n^3}-\dfrac{1}{n^4}\right)\left(3-\dfrac{7}{n^2}\right)}=\dfrac{1.2.4}{1.3}=\dfrac{8}{3}.$

Chọn C.

Giải nhanh: $\dfrac{(n^2+2n)(2n^3+1)(4n+5)}{(n^4-3n-1)(3n^2-7)}\sim\dfrac{n^2.2n^3.4n}{n^4.3n^2}=\dfrac{8}{3}.$

Câu 21. $L=\lim\dfrac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n+8}}=\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{1+\dfrac{8}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1}}=1\longrightarrow$ **Chọn B.**

Giải nhanh: $\dfrac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n+8}}\sim\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}}=1.$

Câu 22. $\lim\dfrac{n^3-2n}{1-3n^2}=\lim\dfrac{n^3\left(1-\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(\dfrac{1}{n^2}-3\right)}=\lim n.\dfrac{1-\dfrac{2}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}-3}$. Ta có

$$\begin{cases}\lim n=+\infty \\ \lim\dfrac{1-\dfrac{2}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}-3}=-\dfrac{1}{3}<0\end{cases}\longrightarrow \text{im}\dfrac{n^3-2n}{1-3n^2}=\lim n.\dfrac{1-\dfrac{2}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}-3}=-\infty\longrightarrow$$ **Chọn C.**

Giải nhanh : $\dfrac{n^3-2n}{1-3n^2}\sim\dfrac{n^3}{-3n^2}=-\dfrac{1}{3}n\longrightarrow-\infty.$

Câu 23. $\lim\dfrac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}=\lim\dfrac{n^3\left(\dfrac{2}{n^2}+3\right)}{n^2\left(4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\lim n.\dfrac{\dfrac{2}{n^2}+3}{4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$. Ta có

$$\begin{cases}\lim n=+\infty \\ \lim\dfrac{\dfrac{2}{n^2}+3}{4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{3}{4}>0\end{cases}\longrightarrow \text{im}\dfrac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}=\lim n.\dfrac{\dfrac{2}{n^2}+3}{4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=+\infty.$$ **Chọn B.**

Giải nhanh : $\dfrac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}\sim\dfrac{3n^3}{4n^2}=\dfrac{3}{4}.n\longrightarrow+\infty.$

Câu 24. $\lim\dfrac{3n-n^4}{4n-5}=\lim\dfrac{n^4\left(\dfrac{3}{n^3}-1\right)}{n\left(4-\dfrac{5}{n}\right)}=\lim n^3.\dfrac{\dfrac{3}{n^3}-1}{4-\dfrac{5}{n}}$. Ta có

$$\begin{cases}\lim n^3=+\infty \\ \lim\dfrac{\dfrac{3}{n^3}-1}{4-\dfrac{5}{n}}=-\dfrac{1}{4}<0\end{cases}\longrightarrow \lim\dfrac{3n-n^4}{4n-5}=1\lim n^3.\dfrac{\dfrac{3}{n^3}-1}{4-\dfrac{5}{n}}=-\infty.$$ **Chọn C.**

Giải nhanh : $\dfrac{3n-n^4}{4n-5}\sim\dfrac{-n^4}{4n}=-\dfrac{1}{4}.n^3\longrightarrow-\infty.$

Câu 25. Theo dấu hiệu ở đã nêu ở phần **Chú ý** trên thì ta chọn giới hạn nào rơi vào trường hợp « bậc tử » $<$ « bậc mẫu » !

$\lim\dfrac{3+2n^3}{2n^2-1}=+\infty$: « bậc tử » $>$ « bậc mẫu » và $a_m b_k=2.2=4>0.$

$\lim\dfrac{2n^2-3}{-2n^3-4}=0$: « bậc tử » $<$ « bậc mẫu ». **Chọn B.**

$\lim\dfrac{2n-3n^3}{-2n^2-1}=+\infty$: « bậc tử » $>$ « bậc mẫu » và $a_n b_k=(-3).(-2)>0.$

$\lim \dfrac{2n^2-3n^4}{-2n^4+n^2}=\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{3}{2}$: « bậc tử » $=$ « bậc mẫu » và $\dfrac{a_m}{b_k}=\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 26. Ta chọn đáp án dạng « bậc tử » $=$ « bậc mẫu » và $a_m b_k>0$. **Chọn C.**

$$\lim u_n=\lim \frac{n^2-3n^3}{9n^3+n^2-1}=\frac{-3}{9}=-\frac{1}{3}.$$

Câu 27. Ta chọn đáp án dạng « bậc tử » $>$ « bậc mẫu » với $a_m b_k>0$. **Chọn A.**

$$\lim u_n=\lim\frac{1+n^2}{5n+5}=\lim n.\frac{\frac{1}{n^2}+1}{5+\frac{5}{n}}=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim n=+\infty\\ \lim\dfrac{\frac{1}{n^2}+1}{5+\frac{5}{n}}=\dfrac{a_m}{b_k}=\dfrac{1}{5}>0\end{cases}.$$

Các đáp án còn lại đều rơi vào trường hợp « bậc tử » $\le$ « bậc mẫu » nên cho kết quả hữa hạn.

Câu 28. Ta chọn đáp án dạng « bậc tử » $=$ « bậc mẫu » và $a_m b_k<0$. **Chọn C.**

$$u_n=\frac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3} \text{ : « bậc tử » } > \text{ « bậc mẫu » và } a_m b_k=-3.2=-6<0 \longrightarrow \lim u_n=-\infty.$$

Chú ý : (i) $\lim\left(a_m n^m+a_{n-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n+a_0\right)=\begin{cases}+\infty & khi\ a_n>0\\ -\infty & khi\ a_n<0\end{cases}.$

(ii) Giả sử $|q|>\max\left\{|q_i|: i=1;2\ldots;m\right\}$ thì

$$\lim\left(a.q^n+a_m q_m^n+\cdots+a_1 q_1^n+a_0\right)=\begin{cases}a_0 & khi\ |q|<1\\ +\infty & khi\ a>0,\ q>1.\\ -\infty & khi\ a<0,\ q>1\end{cases}$$

Ta dùng « dấu hiệu nhanh » này để đưa ra kết quả nhanh chóng cho các bài sau.

Câu 29. $L=\lim\left(3n^2+5n-3\right)=\lim n^2\left(2+\dfrac{5}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right)=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim n^2=+\infty\\ \lim\left(2+\dfrac{5}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right)=2>0\end{cases}$. **Chọn D.**

Giải nhanh : $3n^2+5n-3\sim 3n^2\longrightarrow+\infty$.

Câu 30. Ta có $\lim\left(5n-3\left(a^2-2\right)n^3\right)=\lim n^3\left(\dfrac{5}{n^2}-3\left(a^2-2\right)\right)=-\infty$

$\Leftrightarrow \lim\left(\dfrac{5}{n^2}-3\left(a^2-2\right)\right)=a^2-2<0\Leftrightarrow-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}\xrightarrow[a\in\mathbb{Z},\,a\in(-10;10)]{} a=-1;\,0;\,1.$ **Chọn B.**

Câu 31. Ta có

$$\lim\left(3n^4+4n^2-n+1\right)=\lim n^4\left(3+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim n^4=+\infty\\ \lim\left(3+\dfrac{4}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}\right)=3>0\end{cases}.$$

Chọn D.

Giải nhanh : $3n^4+4n^2-n+1\sim 3n^4 \longrightarrow +\infty.$

Câu 32. Vì $\sqrt{2},\left(\sqrt{2}\right)^2,\ldots,\left(\sqrt{2}\right)^n$ lập thành cấp số nhân có $u_1=\sqrt{2}=q$ nên

$$u_n=\sqrt{2}.\frac{1-\left(\sqrt{2}\right)^n}{1-\sqrt{2}}=\left(2-\sqrt{2}\right)\left[\left(\sqrt{2}\right)^n-1\right]\longrightarrow \lim u_n=+\infty \text{ vì } \begin{cases} a=2-\sqrt{2}>0 \\ q=\sqrt{2}>1 \end{cases}.$$ **Chọn C.**

Câu 33. Ta có $\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+...+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}\left(1+2+\cdots+n\right)=\frac{1}{2}.\frac{n\left(n+1\right)}{2}.$ Do đó

$$\lim\frac{\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+...+\frac{n}{2}}{n^2+1}=\lim\frac{n^2+n}{4n^2+4}=\frac{1}{4}$$ (“bậc tử” = “bậc mẫu”). **Chọn D.**

Câu 34. Ta có $\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}=\frac{1}{n^2}\left(1+2+\cdots+n-1\right)=\frac{1}{n^2}.\frac{\left(n-1\right)\left(1+n-1\right)}{2}=\frac{n^2-n}{2n^2}.$ Do đó

$$\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim\frac{n^2-n}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$ **Chọn C.**

Câu 35. Ta có $1+3+5+\cdots\left(2n-1\right)=\frac{n\left(1+2n-1\right)}{2}=n^2$ nên

$$\lim\left(\frac{1+3+5+\cdots+\left(2n+1\right)}{3n^2+4}\right)=\lim\frac{n^2}{3n^2+4}=\frac{1}{3}\longrightarrow$$ **Chọn B.**

Câu 36. Ta có

$$\lim\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n\left(n+1\right)}\right)=\lim\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Chọn B.

Câu 37. Với mọi $k\in\mathbb{N}^*$ thì $\frac{1}{\left(2k-1\right)\left(2k+1\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$, do đó

$$\lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)}\right)=\lim\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]$$
$$=\lim\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2n+1}\right]=\frac{1}{2}.$$

Chọn A.

Câu 38. Ta có

$$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+......+\frac{1}{n(n+3)}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n+3}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

Do đó $\lim\left(\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+......+\frac{1}{n(n+3)}\right)=\lim\frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{11}{8}$. **Chọn A.**

Câu 39. Đặt $P(n)=\frac{2n^3-3n^2+n}{6}=\frac{n(n-1)(2n+1)}{6}$ thì ta có

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\left(P(2)-P(1)\right)+\left(P(3)-P(2)\right)+\cdots+\left(P(n+1)-P(n)\right)$$
$$=P(n+1)-P(1)=\frac{n(n+1)(2n+3)}{6}$$

Do đó $\lim\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n(n^2+1)}=\lim\frac{n(n+1)(2n+3)}{6n(n^2+1)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. **Chọn D.**

Câu 40. Giả sử $\lim u_n=a$ thì ta có

$$a=\lim u_{n+1}=\lim\frac{1}{2-u_n}=\frac{1}{2-a}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 2\\ a(2-a)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 2\\ a^2-2a+1=0\end{cases}\Leftrightarrow a=1.$$ **Chọn D.**

Câu 41. Giả sử $\lim u_n=a$ thì ta có

$$a=\lim u_{n+1}=\lim\frac{u_n+1}{2}=\frac{a+1}{2}\Leftrightarrow a=1\longrightarrow$$ **Chọn A.**

Câu 42. $\lim\frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}=\lim\frac{\sqrt{9-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{4-\frac{2}{n}}=\frac{3}{4}\longrightarrow$ **Chọn B.**

Giải nhanh: $\frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}\sim\frac{\sqrt{9n^2}}{4n}=\frac{3}{4}$.

Câu 43. $\lim\frac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}=\lim\frac{-1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{3+\frac{2}{n^4}}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\longrightarrow$ **Chọn C.**

Giải nhanh : $\frac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}\sim\frac{-n^2}{\sqrt{3n^4}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 44. $\lim\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n}+5}=\lim\frac{\sqrt{2+\frac{3}{n}}}{\sqrt{2}+\frac{5}{\sqrt{n}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1.$ **Chọn D.**

Giải nhanh: $\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n}+5}\sim\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}}=1.$

Câu 45. $\lim\frac{\sqrt{n+1}-4}{\sqrt{n+1}+n}=\lim\frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\frac{4}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{0}{1}=0\longrightarrow$ **Chọn B.**

Giải nhanh: $\frac{\sqrt{n+1}-4}{\sqrt{n+1}+n}\sim\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}\longrightarrow 0.$

Câu 46. Ta có $\lim\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-n}-2}=\lim\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{2}{n}}}=\frac{1+\sqrt{1}}{1}=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$

$\longrightarrow\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\b=0\end{cases}\longrightarrow S=8\longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 47. $\lim\frac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}}=\lim\frac{\frac{10}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}}=\frac{0}{1}=0.$ **Chọn C.**

Giải nhanh: $\frac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}}\sim\frac{10}{\sqrt{n^4}}=\frac{10}{n^2}\longrightarrow 0.$

Câu 48. $\lim(n+1)\sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}}=\lim\sqrt{\frac{2(n+1)^3}{n^4+n^2-1}}=0$ (“bậc tử” $<$ “bậc mẫu”). **Chọn C.**

Giải nhanh: $(n+1)\sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}}\sim n.\sqrt{\frac{2n}{n^4}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\longrightarrow 0.$

Câu 49. Ta có $\lim\frac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}}=\lim\frac{\sqrt[3]{a+\frac{5}{n}-\frac{7}{n^3}}}{\sqrt{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}=\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{3}\sqrt{3}$

$=b\sqrt{3}+c\Rightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{a}=\frac{b}{3}\\c=0\end{cases}\Rightarrow P=\frac{1}{3}.$ **Chọn B.**

Câu 50. Ta có

$$\lim\sqrt[5]{200-3n^5+2n^2}=\lim n\left(\sqrt[5]{\frac{200}{n^5}-3+\frac{2}{n^3}}\right)=-\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim n=+\infty\\ \lim\left(\sqrt[5]{\frac{200}{n^5}-3+\frac{2}{n^3}}\right)=-\sqrt[5]{3}<0\end{cases}.$$

Chọn D.

Giải nhanh: $\sqrt[5]{200-3n^5+2n^2} \sim \sqrt[5]{-3n^5} = -\sqrt[5]{3}.n \longrightarrow -\infty.$

Câu 51. $\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}-\sqrt{n} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}\right) = \lim\frac{4}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+1}} = 0 \longrightarrow \textbf{Chọn A.}$$

Câu 52. $\sqrt{n^2-n+1}-n \sim \sqrt{n^2}-n = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right) = \lim\frac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n} = \lim\frac{-1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = -\frac{1}{2} \longrightarrow \textbf{Chọn A.}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2-n+1}-n = \dfrac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n} \sim \dfrac{-n}{\sqrt{n^2}+n} = -\dfrac{1}{2}.$

Câu 53. $\lim\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2}\right) = \lim n\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{3+\dfrac{2}{n^2}}\right) = -\infty$ vì

$$\lim n = +\infty,\ \lim\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-\sqrt{3+\frac{2}{n^2}}\right) = 1-\sqrt{3} < 0.\ \textbf{Chọn C.}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2} \sim \sqrt{n^2}-\sqrt{3n^2} = \left(1-\sqrt{3}\right)n \longrightarrow -\infty.$

Câu 54. $\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n} \sim \sqrt{n^2}-\sqrt{n^2} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right) = \lim\frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}} = \lim\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}} = 2.\ \textbf{Chọn B.}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n} = \dfrac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}} \sim \dfrac{4n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}} = 2.$

Câu 55. $\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1} \sim \sqrt{n^2}-\sqrt{n^2} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp:

Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\right) = \lim\dfrac{\left(a^2-a-2\right)n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$

$$= \lim\frac{a^2-a-2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{a^2-a-2}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ b=2 \end{array}\right..\ \textbf{Chọn B.}$$

Câu 56. $\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2} \sim \sqrt{2n^2}-\sqrt{2n^2} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\right)=\lim\frac{2n-1}{\sqrt{2n^2-n+1}+\sqrt{2n^2-3n+2}}$$

$$=\lim\frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Chọn B.

Giải nhanh :

$$\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}=\frac{2n-1}{\sqrt{2n^2-n+1}+\sqrt{2n^2-3n+2}}\sim\frac{2n}{\sqrt{2n^2}+\sqrt{2n^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 57. Giải nhanh : $\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{2n^2}=\left(1-\sqrt{2}\right)n\longrightarrow-\infty.$

Cụ thể : $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}\right)=\lim n.\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}-\sqrt{2+\frac{1}{n}}\right)=-\infty$ vì

$$\lim n=+\infty,\ \lim\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}-\sqrt{2+\frac{1}{n}}\right)=1-\sqrt{2}<0\longrightarrow \textbf{ Chọn C.}$$

Câu 58. Nếu $\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\sim\sqrt{n^2}-n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=\lim\frac{\left(2a^2-8\right)n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\frac{2a^2-8}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$

$=a^2-4=0\Leftrightarrow a=\pm2.$ **Chọn B.**

Câu 59. $\sqrt{n^2-2n+3}-n\sim\sqrt{n^2}-n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)=\lim\frac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}=\lim\frac{-2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1}=-1\longrightarrow \textbf{Chọn A.}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2-2n+3}-n=\frac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}\sim\frac{-2n}{\sqrt{n^2}+n}=-1.$

Câu 60. $\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$-1=\lim u_n=\lim\left(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim\frac{an+4}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim\frac{a+\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{a}{2}\Leftrightarrow a=-2.$$

Chọn C.

Giải nhanh :

$$-1\sim\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}=\frac{an+4}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+1}}\sim\frac{an}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=\frac{a}{2}\Leftrightarrow a=-2.$$

Câu 61. $\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\sim\sqrt[3]{n^3}-\sqrt[3]{n^3}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\right)=\lim\frac{-1}{\sqrt[3]{\left(n^3+1\right)^2}+\sqrt[3]{n^3+1}.\sqrt[3]{n^3+2}+\sqrt[3]{\left(n^3+2\right)}}=0.\longrightarrow \textbf{Chọn C.}$$

Câu 62. $\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\sim\sqrt[3]{-n^3}+n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)=\lim\frac{n^2}{\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2}=\lim\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{1}{n}-1}+1}=\frac{1}{3}.$$

Chọn A.

Giải nhanh : $\sqrt[3]{n^2-n^3}+n=\dfrac{n^2}{\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2}\sim\dfrac{n^2}{\sqrt[3]{n^6}-n\sqrt[3]{-n^3}+n^2}=\dfrac{1}{3}.$

Câu 63. $\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\sim\sqrt[3]{n^3}-n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)=\lim\frac{-2n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3-2n^2\right)^2}+n.\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}=\lim\frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}+1}=-\frac{2}{3}.$$

Chọn B.

Giải nhanh : $\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n=\dfrac{-2n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3-2n^2\right)^2}+n.\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}\sim\dfrac{-2n^2}{\sqrt[3]{n^6}+n.\sqrt[3]{n^3}+n^2}=-\dfrac{2}{3}.$

Câu 64. $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\sim\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n}\right)=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\lim\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\lim\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=1\longrightarrow \textbf{Chọn D.}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\sim\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=1.$

Câu 65. $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sim\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n}\right)=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}\longrightarrow \textbf{Chọn B.}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sim\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}.$

Câu 66. $n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)\sim n\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}\right)=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)=\lim\frac{4n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3}}=\lim\frac{4}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}}=2\longrightarrow \textbf{Chọn B.}$$

Giải nhanh : $n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)=\frac{4n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3}}\sim\frac{4n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=2.$

Câu 67. $n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)\sim n\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}\right)=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)=\lim\frac{7n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-6}}$$
$$=\lim\frac{7}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{6}{n^2}}}=\frac{7}{2}.$$

Chọn C.

Giải nhanh : $n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)=\frac{7n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-6}}\sim\frac{7n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=\frac{7}{2}.$

Câu 68. $\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}=\lim-\frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}\right)=\lim n.\left[-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}\right)\right]=-\infty$$

$$\text{vì }\lim n=+\infty,\ \lim\left[-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}\right)\right]=-1<0\longrightarrow \textbf{Chọn C.}$$

Giải nhanh :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}\right)\sim-\frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}\right)=-n\longrightarrow-\infty.$$

Câu 69. $\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}\sim\sqrt{9n^2}=3n\neq0\longrightarrow$ giải nhanh :

$$\frac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}\sim\frac{\sqrt{9n^2}}{3n}=1\longrightarrow \textbf{Chọn A.}$$

Cụ thể : $\lim\frac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}=\lim\frac{\sqrt{9-\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{\sqrt{9}}{3}=1.$

Câu 70. $\sqrt[3]{n^3+1}-n\sim\sqrt[3]{n^3}-n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)=\lim\frac{1}{\sqrt[3]{\left(n^3+1\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2}=0\longrightarrow$$ **Chọn B.**

Câu 71. Giải nhanh : $\frac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}\sim\frac{-5^{n+2}}{2.5^n}=-\frac{25}{2}\longrightarrow$ **Chọn A.**

Cụ thể : $\lim\frac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}=\lim\frac{2\left(\frac{1}{5}\right)^n-25}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+2}=-\frac{25}{2}.$

Câu 72. Giải nhanh : $\frac{3^n-2.5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}\sim\frac{-2.5^{n+1}}{5^n}=-10\longrightarrow$ **Chọn B.**

Cụ thể : $\lim\frac{3^n-2.5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}=\lim\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n-10}{2.\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}=-10.$

Câu 73. Giải nhanh : $\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}\sim\frac{3^n}{4^n}=\left(\frac{3}{4}\right)^n\longrightarrow 0.$ **Chọn A.**

Cụ thể : $\lim\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}=\lim\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-8.\left(\frac{1}{2}\right)^n-3.\left(\frac{1}{4}\right)^n}{3.\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}=\frac{0}{1}=0.$

Câu 74. Giải nhanh : $\frac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1}\sim\frac{3^n}{-2.3^n}=-\frac{1}{2}\longrightarrow$ **Chọn B.**

Cụ thể : $\lim\frac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1}=\lim\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n-2+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=-\frac{1}{2}.$

Câu 75. Giải nhanh :

$$\frac{\left(\sqrt{5}\right)^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}-3}+\frac{2n^2+3}{n^2-1}\sim\frac{\left(\sqrt{5}\right)^n}{\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}}+\frac{2n^2}{n^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}+2=\frac{\sqrt{5}}{5}+2\longrightarrow\begin{cases}a=1\\b=5.\\c=2\end{cases}$$

Vậy $S=1^2+5^2+2^2=30.$ **Chọn B.**

Cụ thể : $\lim\left(\frac{\left(\sqrt{5}\right)^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}-3}++\frac{2n^2+3}{n^2-1}\right)=\lim\left(\frac{1-2.\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n}{5.\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n+\sqrt{5}-.\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n}+\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}+2=\frac{\sqrt{5}}{5}+2.$

Câu 76. Giải nhanh: $\frac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}=\frac{\pi^n+3^n+4^n}{3\pi^n-3^n+4.4^n}\sim\frac{4^n}{4.4^n}=\frac{1}{4}\longrightarrow$ **Chọn D.**

Cụ thể : $\lim\frac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}=\lim\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}{3.\left(\frac{\pi}{4}\right)^n-3.\left(\frac{3}{4}\right)^n+4}=\frac{1}{4}.$

Câu 77. Giải nhanh : Vì $3>\sqrt{5}$ nên $3^n-\sqrt{5}^n\sim 3^n\longrightarrow+\infty.$ **Chọn D.**

Cụ thể : $\lim\left[3^n-\sqrt{5}^n\right]=\lim 3^n\left(1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n\right)=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim 3^n=+\infty\\ \lim 1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n=1>0\end{cases}.$

Câu 78. Giải nhanh : $3^4.2^{n+1}-5.3^n\sim-5.3^n=-\infty\ (-5<0).\longrightarrow$ **Chọn C.**

Cụ thể : $\lim\left(3^4.2^{n+1}-5.3^n\right)=\lim 3^n\left(162.\left(\frac{2}{3}\right)^n-5\right)=-\infty$ vì $\begin{cases}\lim 3^n=+\infty\\ \lim\left(162.\left(\frac{2}{3}\right)^n-5\right)=-5<0\end{cases}.$

Câu 79. Giải nhanh : $\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2n+4^n}\sim\frac{3^n}{4^n}=\left(\frac{3}{4}\right)^n\longrightarrow 0.$ **Chọn A.**

Cụ thể : $0\le\left|\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2n+4^n}\right|\le\frac{8.3^{n+1}}{4^n}=24.\left(\frac{3}{4}\right)^n\to 0\longrightarrow\lim\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2n+4^n}=0.$

Câu 80. Ta có $2^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\Rightarrow 2^n\ge C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\sim\frac{n^3}{6}\Rightarrow\begin{cases}\frac{n}{2^n}\to 0\\ \frac{2^n}{n^2}\to+\infty\end{cases}$. Khi đó:

$$\lim\frac{2^{n+1}+3n+10}{3n^2-n+2}=\lim\frac{2^n}{n^2}.\frac{2+3.\frac{n}{2^n}+10.\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=+\infty\text{ vì }\begin{cases}\lim\frac{2^n}{n^2}=+\infty\\ \lim\frac{2+3.\frac{n}{2^n}+10.\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{2}{3}>0\end{cases}.$$

Chọn A.

Câu 81. Giải nhanh: $\sqrt[4]{\frac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+2}}}\sim\sqrt[4]{\frac{4^n}{4^{n+a}}}=\frac{1}{2^a}\le\frac{1}{1024}\Leftrightarrow 2^a\ge 1024=2^{10}\Leftrightarrow a\ge 10.$

Mà $a\in(0;2018)$ và $a\in\mathbb{Z}$ nên $a\in\{10;2017\}\longrightarrow$ có 2008 giá trị a. **Chọn B.**

Cụ thể : $\lim\sqrt[4]{\frac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+a}}}=\lim\sqrt[4]{\frac{1+2.\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+4^a}}=\sqrt{\frac{1}{4^a}}=\sqrt{\frac{1}{\left(2^a\right)^2}}=\frac{1}{2^a}.$

Câu 82. Ta có $\lim\left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)=\lim\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\lim\frac{(-1)^n}{3^n}$. Ta có

$$\begin{cases}\lim\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}=\lim\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{3-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}\\ 0\le\left|\frac{(-1)^n}{3^n}\right|\le\left(\frac{1}{3}\right)^n\to 0\Rightarrow\lim\frac{(-1)^n}{3^n}=0\end{cases}\Rightarrow\lim\left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)=\frac{1}{3}.$$ **Chọn C.**

Câu 83. $\lim\left(\frac{\sqrt{3n}+(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right)=\lim\left(\frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n}-1}+\frac{(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}}\right)$. Ta có :

$$\begin{cases}\lim\frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n}-1}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}\\ 0\le\left|\frac{(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}-1}\to 0\Rightarrow\lim\frac{(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}=0\end{cases}\Rightarrow\lim\left(\frac{\sqrt{3n}+(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right)=\sqrt{3}.$$

Chọn B.

Câu 84. Ta có $\begin{cases}\lim\frac{an^2-1}{3+n^2}=\lim\frac{a-\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}+1}=a\\ \lim\frac{1}{2^n}=\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n=0\end{cases}\Rightarrow\lim\sqrt{3+\frac{an^2-1}{3+n^2}-\frac{1}{2^n}}=\sqrt{3+a}.$

Ta có $\begin{cases}a\in(0;20),\ a\in\mathbb{Z}\\ \sqrt{a+3}\in\mathbb{Z}\end{cases}\longrightarrow a\in\{1;6;13\}$. **Chọn B.**

Câu 85. Ta có $\lim\sqrt{2.3^n-n+2}=\lim\sqrt{3^n}.\sqrt{2-\frac{n}{3^n}+2.\left(\frac{1}{3}\right)^n}$. Vì

$$\left.\begin{array}{l}\lim\sqrt{3^n}=+\infty\\ 0\le\frac{n}{3^n}\le\frac{n}{C_n^2}=\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{2}{n-1}\to 0\Rightarrow\lim\frac{n}{3^n}=0\\ \lim\left(\frac{1}{3}\right)^n=0\end{array}\right\}\longrightarrow\begin{cases}\lim\sqrt{3^n}=+\infty\\ \lim\sqrt{2-\frac{n}{3^n}+2.\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\sqrt{2}>0\end{cases},$$

do đó $\lim\sqrt{2.3^n-n+2}=+\infty$. **Chọn D.**

Câu 86. Gọi q là công bội của cấp số nhân, ta có :

$$\begin{cases}\dfrac{u_1}{1-q}=2\\ S_3=u_1.\dfrac{1-q^3}{1-q}=\dfrac{9}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=2(1-q)\\ 2(1-q^3)=\dfrac{9}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=-\dfrac{1}{2}\\ u_1=2\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=3\end{cases}$$. **Chọn A.**

Câu 87. Ta có

$$S=9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^{n-3}}+\cdots=9\left(\underbrace{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,q=\frac{1}{3}}\right)=9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)=\frac{27}{2}.$$

Chọn A.

Câu 88. Ta có

$$S=\sqrt{2}\left(\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\ q=\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=2\sqrt{2}.$$ **Chọn C.**

Câu 89. Ta có

$$S=1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots+\frac{2^n}{3^n}+\cdots=\underbrace{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\ q=\frac{2}{3}}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3.$$ **Chọn A.**

Câu 90. Ta có :

$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2.3^{n-1}}+\cdots=\frac{1}{2}\left(\underbrace{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}}}_{CSN\ lvh: u_1=1,\ q=-\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right)=\frac{3}{8}.$$ **Chon D.**

Câu 91. Ta có

$$S=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+...+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)+...$$

$$=\left(\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=q=\frac{1}{2}}\right)-\left(\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots}_{CSN\ lvh: u_1=q=\frac{1}{3}}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Chọn D.

Câu 92. Ta có $1+a+a^2+\ldots+a^n$ là tổng $n+1$ số hạng đầu tiên của cấp số nhân với số hạng đầu là 1 và công bội là a, nên $1+a+a^2+\ldots+a^n=\dfrac{1.\left(1-a^{n+1}\right)}{1-a}=\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Tương tự: $1+b+b^2+\ldots+b^n=\dfrac{1\left(1-b^{n+1}\right)}{1-b}=\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$.

Do đó $\lim \dfrac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}=\lim \dfrac{\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}}=\lim \dfrac{1-b}{1-a}.\dfrac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}=\dfrac{1-b}{1-a}\ \left(|a|<1,|b|<1\right).$

Chọn B.

Câu 93. Ta có

$$S=\underbrace{1+\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^6 x+\cdots+\cos^{2n} x+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\ q=\cos^2 x}=\frac{1}{1-\cos^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}.$$ **Chọn C.**

Câu 94. Ta có

$$S=\underbrace{1-\sin^2 x+\sin^4 x-\sin^6 x+\cdots+(-1)^n.\sin^{2n} x+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\ q=-\sin^2 x}=\frac{1}{1+\sin^2 x}.$$ **Chọn C.**

Câu 95. Ta có $\tan\alpha\in(0;1)$ với mọi $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$, do đó

$$S=\underbrace{1-\tan\alpha+\tan^2\alpha-\tan^3\alpha+\ldots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,q=-\tan\alpha}=\frac{1}{1+\tan\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}.$$ **Chọn B.**

Câu 96. Ta có $\begin{cases} M=\dfrac{1}{1-m}\\ N=\dfrac{1}{1-n}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} m=1-\dfrac{1}{M}\\ n=1-\dfrac{1}{N}\end{cases}$, khi đó

$$A=\frac{1}{1-mn}=\frac{1}{1-\left(1-\dfrac{1}{M}\right)\left(1-\dfrac{1}{N}\right)}=\frac{MN}{M+N-1}.$$ **Chọn A.**

Câu 97. Ta có $0,5111\cdots=0,5+10^{-2}+10^{-3}+\cdots+10^{-n}+\cdots$

Dãy số $10^{-2};10^{-3};...;10^{-n};...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu bằng $u_1=10^{-2}$, công bội bằng $q=10^{-1}$ nên $S=\dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{10^{-2}}{1-10^{-1}}=\dfrac{1}{90}.$

Vậy $0,5111...=0,5+S=\dfrac{46}{90}=\dfrac{23}{45}\longrightarrow\begin{cases} a=23\\ b=45\end{cases}\longrightarrow T=a+b=68.$ **Chọn B.**

Câu 98. Ta có

$$A=0,353535...=0,35+0,0035+...=\frac{35}{10^2}+\frac{35}{10^4}+...=\frac{\dfrac{35}{10^2}}{1-\dfrac{1}{10^2}}=\frac{35}{99}\Rightarrow\begin{cases} a=35\\ b=99\end{cases}\Rightarrow T=3465..$$

Chọn B.

Câu 99. Ta có

$$B=5,231231...=5+0,231+0,000231+...$$

$$=5+\frac{231}{10^3}+\frac{231}{10^6}+...=5+\frac{\frac{231}{10^3}}{1-\frac{1}{10^3}}=5+\frac{231}{999}=\frac{1742}{333}\longrightarrow\begin{cases}a=1742\\b=333\end{cases}\Rightarrow T=1409$$

Chọn A.

Câu 100. Ta có

$$0,17232323\ldots=0,17+23\left(\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^8}\cdots\right)$$

$$=\frac{17}{100}+23.\frac{\frac{1}{10000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{17}{100}+\frac{23}{100.99}=\frac{1706}{9900}=\frac{853}{4950}\,.$$

$$\longrightarrow\begin{cases}a=853\\b=4950\end{cases}\Rightarrow 2^{12}<T=4097<2^{13}.$$

Chọn D.

2. GIÔÙI HAÏN CUÛA HAØM SOÁ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

I – GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K\setminus\{x_0\}$.

Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n\in K\setminus\{x_0\}$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to x_0$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ với c là hằng số.

2. Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 1

a) Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$. Khi đó:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=L+M$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=L-M$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=L.M$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$ (nếu $M\neq 0$).

b) Nếu $f(x)\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$, thì $L\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

3. Giới hạn một bên

Định nghĩa 2

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(x_0;b)$.

Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$.

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;x_0)$.

Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a<x_n<x_0$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$.

Định lí 2

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=L\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L.}$$

II – GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Định nghĩa 3

a) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\left(a;+\infty\right)$.

Ta nói hàm số $y=f\left(x\right)$ có giới hạn là số L khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số $\left(x_n\right)$ bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$, ta có $f\left(x_n\right)\to L.$

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=L.$

b) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\left(-\infty;a\right)$.

Ta nói hàm số $y=f\left(x\right)$ có giới hạn là số L khi $x\to-\infty$ nếu với dãy số $\left(x_n\right)$ bất kì, $x_n<a$ và $x_n\to-\infty$, ta có $f\left(x_n\right)\to L.$

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=L.$

Chú ý:

a) Với c, k là hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

$$\lim_{x\to+\infty} c=c;\quad \lim_{x\to-\infty} c=c;\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{c}{x^k}=0;\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{c}{x^k}=0.$$

b) Định lí 1 về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x\to x_0$ vẫn còn đúng khi $x_n\to+\infty$ hoặc $x\to-\infty$.

III – GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

1. Giới hạn vô cực

Định nghĩa 4

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\left(a;+\infty\right)$.

Ta nói hàm số $y=f\left(x\right)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số $\left(x_n\right)$ bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$, ta có $f\left(x_n\right)\to-\infty.$

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=-\infty.$

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-f\left(x\right)\right)=-\infty.$

2. Một vài giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$ với k nguyên dương. b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=\begin{cases}+\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn}\\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ}\end{cases}.$

3. Một vài quy tắc về giới hạn vô cực

a) Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)g(x)\right]$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L<0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b) Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L>0$	0	$+$	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
$L<0$		$+$	$-\infty$
		$-$	$+\infty$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Vấn đề 1. Tìm giới hạn bằng định nghĩa

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm giới hạn các hàm số sau bằng định nghĩa :

1. $A=\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+x+1)$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$ **3.** $C=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{x-1}$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hàm số sau không có giới hạn:

1. $f(x)=\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ khi $x\to 0$ **2.** $f(x)=\cos^5 2x$ khi $x\to-\infty$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

1I. BÀI TẬP TỰ LUẬN TỰ LUYỆN

Bài 1 Tìm giới hạn các hàm số sau bằng định nghĩa

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3+1\right)$ **3.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{x-2}$ **5.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x+2}$. **6.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x+2}{2x-1}$

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{2x}$ **8.** $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{4x-3}{x-1}$ **9.** $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{3x-1}{x-2}$

Bài 2 Chứng minh rằng các hàm số sau không có giới hạn :

1. $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ khi $x\to0$ **2.** $f(x)=\cos x$ khi $x\to+\infty$

Bài 3 Bằng định nghĩa hãy tìm các giới hạn sau

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+x-3}{x-1}$ **2.** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+1}{(2-x)^4}$ **3.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{2x^2+1}$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x-1\right)$ **5.** $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{(x^4+1)(2-x)}}$ **6.** $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2+3x+2}{|x+1|}$.

Bài 4 Chứng minh rằng các hàm số sau không có giới hạn

1. $f(x)=\cos\dfrac{1}{x^2}$ khi $x\to0$ **2.** $f(x)=\sin 2x$ khi $x\to+\infty$

Vấn đề 2. Tìm giới hạn của hàm số

Bài toán 01: Tìm $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ biết $f(x)$ xác định tại x_0.

Phương pháp:

* Nếu $f(x)$ là hàm số cho bởi một công thức thì giá trị giới hạn bằng $f(x_0)$

* Nếu $f(x)$ cho bởi nhiều công thức, khi đó ta sử dụng điều kiện để hàm số có giới hạn (Giới hạn trái bằng giới hạn phải).

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x+3\cos x+x}{2x+\cos^2 3x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2x}{\sqrt[3]{x+6}+2x-1}$

Ví dụ 2. Xét xem các hàm số sau có giới hạn tại các điểm chỉ ra hay không? Nếu có hay tìm giới hạn đó?

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+2} & \text{khi } x<1\\ \dfrac{3x+2}{3} & \text{khi } x\ge1\end{cases}$ khi $x\to1$;

2. $f(x)=\begin{cases}2x^2+3x+1 & \text{khi } x\ge0\\ -x^2+3x+2 & \text{khi } x<0\end{cases}$ khi $x\to0$

Ví dụ 3. Tìm m để các hàm số:

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+mx+2m+1}{x+1} & \text{khi } x\ge0\\ \dfrac{2x+3m-1}{\sqrt{1-x}+2} & \text{khi } x<0\end{cases}$ có giới hạn khi $x\to0$.

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{1-x}}+mx+1 & \text{khi } x<1\\ 3mx+2m-1 & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$ có giới hạn khi $x\to 1$.

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN TỰ LUYỆN

Bài 1 Tìm giới hạn các hàm số sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$

2. $B=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\tan x+1}{\sin x+1}$

3. $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}-x+1}{3x+1}$

4. $D=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7x+1}+1}{x-2}$.

Bài 2 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+1}{x^2+x+4}$

2. $B=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin^2 2x-3\cos x}{\tan x}$

3. $C=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x^2-x+1}-\sqrt[3]{2x+3}}{3x^2-2}$

4. $D=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt[3]{3x+1}-2}$

Bài 3 Xét xem các hàm số sau có giới hạn tại các điểm chỉ ra hay không ? Nếu có hãy tìm giới hạn đó ?

1. $f(x)=\begin{cases}3x^3-5x^2+4 & \text{khi } x\ge 1\\ 3x-1 & \text{khi } x<1\end{cases}$ khi $x\to 1$

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x>2\\ 2x+1 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$ tại $x\to 2$.

Bài 4 Xét xem các hàm số sau có giới hạn tại các điểm chỉ ra hay không ? Nếu có hãy tìm giới hạn đó ?

1. $f(x)=\begin{cases}3x^2-5x+1 & \text{khi } x\ge 1\\ -3x+2 & \text{khi } x<1\end{cases}$ tại $x=1$.

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x>2\\ 2x+1 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$ tại $x=2$.

Bài 5

1. Tìm a để hàm số sau có giới hạn khi $x\to 2$ $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+1 & \text{khi } x>2\\ 2x^2-x+1 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$.

2. Tìm a để hàm số sau có giới hạn tại $x=0$ $f(x)=\begin{cases}5ax^2+3x+2a+1 & \text{khi } x\ge 0\\ 1+x+\sqrt{x^2+x+2} & \text{khi } x<0\end{cases}$.

Bài 6 Tìm a để hàm số

1. $f(x)=\begin{cases}5ax^2+3x+2a+1 & \text{khi } x\ge 0\\ 1+x+\sqrt{x^2+x+2} & \text{khi } x<0\end{cases}$ có giới hạn tại $x\to 0$

2. $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+1 & \text{khi } x>1\\ 2x^2-x+3a & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ có giới hạn khi $x\to 1$.

Bài toán 02. Tìm $A=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x_0)=g(x_0)=0$.

Dạng này ta gọi là dạng vô định $\frac{0}{0}$.

Để khử dạng vô định này ta sử dụng định lí Bozu cho đa thức:

Định lí: Nếu đa thức $f(x)$ có nghiệm $x=x_0$ thì ta có :

$$f(x)=(x-x_0)f_1(x).$$

*Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức thì ta phân tích $f(x)=(x-x_0)f_1(x)$ và $g(x)=(x-x_0)g_1(x)$. Khi đó $A=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$, nếu giới hạn này có dạng $\frac{0}{0}$ thì ta tiếp tục quá trình như trên.

__Chú ý :__Nếu tam thức bậc hai ax^2+bx+c có hai nghiệm x_1,x_2 thì ta luôn có sự phân tích $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

* Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm chứa căn thức thì ta nhân lượng liên hợp để chuyển về các đa thức, rồi phân tích các đa thức như trên.

Các lượng liên hợp:

1. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$
2. $(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a-b$
3. $(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+...+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b$

* Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm chứa căn thức không đồng bậc ta sử dụng phương pháp tách, chẳng hạn:

Nếu $\sqrt[n]{u(x)},\sqrt[m]{v(x)}\to c$ thì ta phân tích:

$$\sqrt[n]{u(x)}-\sqrt[m]{v(x)}=(\sqrt[n]{u(x)}-c)-(\sqrt[m]{v(x)}-c).$$

Trong nhiều trường hợp việc phân tích như trên không đi đến kết quả ta phải phân tích như sau:

$\sqrt[n]{u(x)}-\sqrt[m]{v(x)}=(\sqrt[n]{u(x)}-m(x))-(\sqrt[m]{v(x)}-m(x))$, trong đó $m(x)\to c$.

* Một đẳng thức cần lưu ý:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$

2. $B=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-5x^3+2x^2+6x-4}{x^3-x^2-x+1}$

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

1. $C=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$

2. $D=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2x)^2(1+3x)^3-1}{x}$

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-x}{x^2-1}$

2. $B=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x+2}-x}{\sqrt{3x-2}-2}$

Ví dụ 4. Tìm các giới hạn sau:

1. $B=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1}$

2. $C=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}.\sqrt[3]{3x-2}.\sqrt[4]{4x-3}-1}{x-1}$

Ví dụ 5. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt{5x-1}}{x-1}$

2. $B=\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN TỰ LUYỆN

Bài 1 Tìm các gới hạn sau :

1. $A=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}$

2. $B=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-5x^2+4}{x^3-8}$

3. $C=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+3x)^3-(1-4x)^4}{x}$

4. $D=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

Bài 2 Tìm các gới hạn sau :

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^n-1}{x^m-1}$ $(m,n\in\mathbb{N}^*)$

2. $B=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}$ $(n\in\mathbb{N}^*, a\neq 0)$

3. $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{\sqrt[m]{1+bx}-1}$ với $ab\neq 0$

4. $B=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\alpha x}\sqrt[3]{1+\beta x}\sqrt[4]{1+\gamma x}-1}{x}$ với $\alpha\beta\gamma\neq 0$.

Bài 3 Tìm các gới hạn sau :

1. $A=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x^3-3x-2}$

2. $B=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-3x+2}{x^3+2x-3}$

3. $C=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-x}{x^2-4x+3}$

4. $D=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{2x+1}-1}$

5. $E=\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{2x+2}-2}$

6. $F=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}-1}{x}$

7. $M=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$

8. $N=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$

9. $G=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}\sqrt[n]{1+bx}-1}{x}$

10. $V=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$

11. $K=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)...\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{\left(1-x\right)^{n-1}}$

12. $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}$

Bài 4 Tìm các gới hạn sau :

1. $A=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x^3-8}$

2. $B=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-3x^2+2}{x^3+2x-3}$

3. $C=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-4x+3}$

4. $D=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{2x+1}-1}$

5. $E=\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{2x+2}-2}$

6. $F=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}-1}{x}$

7. $M=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{1-\cos 3x}$

8. $N=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{\sqrt{1+x}-1}$

9. $V=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}$

10. $K=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)...\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{\left(1-x^2\right)^{n-1}}$.

Bài 5 Tìm các giới hạn sau

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt[3]{2x+1}}{x}$

2. $B=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{4x+5}-3}{\sqrt[3]{5x+3}-2}$

3. $C=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[4]{2x+3}+\sqrt[3]{2+3x}}{\sqrt{x+2}-1}$

4. $D=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x-\sqrt[3]{3x+2}}$.

Bài 6 Tìm các giới hạn sau

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$

2. $B=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+4x}-\sqrt[3]{7+6x}}{x^3+x^2-x-1}$

Bài toán 03: Tìm $B=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$**, trong đó** $f(x),g(x)\to\infty$**, dạng này ta còn gọi là dạng vô**

Phương pháp: Tương tự như cách khử dạng vô định ở dãy số. Ta cần tìm cách đưa về các giới hạn:

* $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} x^{2k}=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} x^{2k+1}=+\infty\ (-\infty)$.

* $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\dfrac{k}{x^n}=0\ \ (n>0;k\neq 0)$.

* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty\ (-\infty)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{k}{f(x)}=0\ \ (k\neq 0)$.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}$

2. $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-3x+4}+3x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{2x+2}$

2. $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}-1}$

1I. BÀI TẬP TỰ LUẬN TỰ LUYỆN

Bài 1 Tìm các giới hạn sau:

1. $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sqrt{3x^2+2}}{5x+\sqrt{x^2+1}}$

2. $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}}$

3. $E=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$

4. $F=\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{4x^2+1}-x)$

5. $M=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$

6. $N=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+2x}-2x\right)$

7. $H=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}-\sqrt{4x^2+2}\right)$

8. $K=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}-2x\right)$

Bài 2 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+5x+1}{2x^2+x+1}$

2. $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0x^n+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+...+b_{m-1}x+b_m}\ (a_0b_0\neq 0)$.

Bài 3 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{3x^3+1}-\sqrt{2x^2+x+1}}{\sqrt[4]{4x^4+2}}$

2. $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x^2+1}-2x+1}{\sqrt[3]{2x^3-2}+1}$.

Bài 4 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+1)^3(x+2)^4}{(3-2x)^7}$

2. $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-3x+4}-2x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$

3. $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\sqrt{3x^2+2}}{5x-\sqrt{x^2+1}}$

4. $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}}$.

Bài 5 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt[3]{2x^3+x-1}\right)$

2. $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)$

3. $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}-2x\right)$

4. $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$.

Bài 6 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-2\sqrt{x^2-x}+x\right)$

2. $B=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$

Bài 7 Tìm các giới hạn sau

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0x^n+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+...+b_{m-1}x+b_m}$, $(a_0b_0\neq 0)$

2. $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt[3]{8x^3+x-1}}{\sqrt[4]{x^4+3}}$

3. $C=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2}+\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{x^2+1}-x}$

4. $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x^2+1}+2x+1}{\sqrt[3]{2x^3+x+1}+x}$.

Bài toán 04: Dạng vô định: $\infty-\infty$ **và** $0.\infty$

Phương pháp:

Những dạng vô định này ta tìm cách biến đổi đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau: $A=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3-3x^2}+\sqrt{x^2-2x})$

Ví dụ 2. Tìm giới hạn sau: $B=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$

1I. BÀI TẬP TỰ LUẬN TỰ LUYỆN

Bài 1 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$

2. $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2-x+1}\right)$

3. $C=\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n)}-x]$

Bài 2 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$

2. $B=\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{4x^2+1}-x)$

3. $C=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1})$

4. $D=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{8x^3+2x}-2x)$

5. $E=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}-\sqrt{4x^2+2})$

6. $F=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\sqrt[3]{1-x^3})$.

Bài toán 05: Dạng vô định các hàm lượng giác

Phương pháp:

Ta sử dụng các công thức lượng giác biến đổi về các dạng sau:

- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$, từ đây suy ra $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x}=1$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\tan u(x)}{u(x)}=1$.

I. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{1-\sqrt{\cos 2x}}$

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}x^3\sin\frac{1}{x^2}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2\sin x+\cos^3 x\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN TỰ LUYỆN

Bài 1 Tìm giới hạn sau: $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}$

Bài 2 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\sin mx-\cos mx}{1+\sin nx-\cos nx}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2}$.

Bài 3 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2\sin\frac{3x}{2}}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{x(\sin 3x-\sin 4x)}$

3. $C=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x}{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin 3x}-\cos 2x}$

Bài 4 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 1}.\frac{\sin(\pi x^m)}{\sin(\pi x^n)}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)\tan x$

3. $C=\lim\limits_{x\to 0}x^\alpha\sin\frac{1}{x}\quad(\alpha>0)$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

Bài 5. Tìm các giới hạn sau

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 4x}{\cos 5x-\cos 6x}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1+2\sin 2x}}{\sin 3x}$ **3.** $C=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[4]{\cos x}}$

4. $D=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^4 2x}{\sin^4 3x}$ **5.** $E=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\sin(\tan x)}$ **6.** $F=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3\sin x+2\cos x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

7. $H=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{\cos ax}-\sqrt[m]{\cos bx}}{\sin^2 x}$ **8.** $M=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[n]{\cos ax}}{x^2}$.

Bài 6. Tìm các giới hạn sau

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 4x}{\cos 5x-\cos 6x}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1+2\sin 2x}}{\sin 3x}$ **3.** $C=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[4]{\cos x}}$

4. $D=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^4 2x}{\sin^4 3x}$ **5.** $E=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\sin(\tan x)}$ **6.** $F=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3\sin x+2\cos x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

7. $H=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{\cos ax}-\sqrt[m]{\cos bx}}{\sin^2 x}$ **8.** $M=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{1-\cos 2x}$.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Vấn đề 1. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠ

Câu 1. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+7x+11\right)$ là:

A. 37. **B.** 38. **C.** 39. **D.** 40.

Câu 2. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|x^2-4\right|$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 3. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{2}$ là:

A. $\sin\frac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Câu 4. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-3}{x^3+2}$ là:

A. 1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 5. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-x^3}{(2x-1)\left(x^4-3\right)}$ là:

A. 1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 6. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\frac{|x-1|}{x^4+x-3}$ là:

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Câu 7. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ là:

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 8. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\frac{9x^2-x}{(2x-1)\left(x^4-3\right)}}$ là:

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** 5.

Câu 9. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{x^2+2x}}$ là:

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Câu 10. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}$ là:

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Vấn đề 2. GIỚI HẠN MỘT BÊN

Câu 11. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x-15}{x-2}$ là:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\frac{15}{2}$. **D.** 1.

Câu 12. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ là:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$.

C. $-\frac{15}{2}$. **D.** Không xác định.

Câu 13. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\frac{|3x+6|}{x+2}$ là:

A. $-\infty$. **B.** 3.

C. $+\infty$. **D.** Không xác định.

Câu 14. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ là:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 15. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to -3^+}\frac{x^2+13x+30}{\sqrt{(x+3)\left(x^2+5\right)}}$ là:

A. -2. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\frac{2}{\sqrt{15}}$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x<1\\ \sqrt{3x^2+1} & \text{với } x\ge 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ là:

A. $+\infty$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $-\infty$.

Câu 17. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x<1\\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x\ge 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)$ là:

A. $+\infty$. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 18. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-3 & \text{với } x\ge 2\\ x-1 & \text{với } x<2\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)$ là:

A. -1. **B.** 0.

C. 1. **D.** Không tồn tại.

Câu 19. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{x-2}+3 & \text{với } x\ge 2\\ ax-1 & \text{với } x<2\end{cases}$. Tìm a để tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)$.

A. $a=1$. **B.** $a=2$. **C.** $a=3$. **D.** $a=4$.

Câu 20. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-2x+3 & \text{với } x>3\\ 1 & \text{với } x=3\\ 3-2x^2 & \text{với } x<3\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $\lim\limits_{x\to 3^+} f\left(x\right)=6$. **B.** Không tồn tại $\lim\limits_{x\to 3} f\left(x\right)$.

C. $\lim\limits_{x\to 3^-} f\left(x\right)=6$. **D.** $\lim\limits_{x\to 3^-} f\left(x\right)=-15$.

Vấn đề 3. GIỚI HẠN TẠI VÔ CỰC

Câu 21. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x-x^3+1\right)$ là:

A. 1. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 22. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\left|x\right|^3+2x^2+3\left|x\right|\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Câu 23. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** $-\infty$.

Câu 23. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$ là:

A. $\sqrt[3]{3}+1$. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt[3]{3}-1$. **D.** $-\infty$.

Câu 25. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)$ là:

A. 4. **B.** $-\infty$. **C.** 6. **D.** $+\infty$.

Vấn đề 4. DẠNG VÔ ĐỊNH $\dfrac{0}{0}$

Câu 26. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$.

C. 3. **D.** Không xác định.

Câu 27. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}$ là:

A. $-\dfrac{3}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $-\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Câu 28. Biết rằng $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2x^3+6\sqrt{3}}{3-x^2}=a\sqrt{3}+b$. Tính a^2+b^2.

A. 10. **B.** 25. **C.** 5. **D.** 13.

Câu 29. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{-x^2-x+6}{x^2+3x}\right|$ là:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Câu 30. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}$ là:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Câu 31. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2+\pi^{21}\right)\sqrt[7]{1-2x}-\pi^{21}}{x}$ là:

A. $-\dfrac{2\pi^{21}}{7}$. **B.** $-\dfrac{2\pi^{21}}{9}$. **C.** $-\dfrac{2\pi^{21}}{5}$. **D.** $\dfrac{1-2\pi^{21}}{7}$.

Câu 32. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}$ là:

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 33. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$ là:

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 34. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$ là:

A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** $\dfrac{13}{12}$. **C.** $\dfrac{11}{12}$. **D.** $-\dfrac{13}{12}$.

Câu 35. Biết rằng $b>0,\ a+b=5$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=2$. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $1<a<3$. **B.** $b>1$.

C. $a^2+b^2>10$. **D.** $a-b<0$.

Vấn đề 5. DẠNG VÔ ĐỊNH $\dfrac{\infty}{\infty}$

Câu 36. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}$ là:

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 37. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}$ là:

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 2.

Câu 38. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}$ là:

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Câu 39. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ là:

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** -1.

Câu 40. Biết rằng $\dfrac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x\to+\infty$ (với a là tham số). Tính giá trị nhỏ nhất của $P=a^2-2a+4$.

A. $P_{\min}=1$. **B.** $P_{\min}=3$. **C.** $P_{\min}=4$. **D.** $P_{\min}=5$.

Câu 41. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}$ là:

A. -2. **B.** -1. **C.** -2. **D.** $+\infty$.

Câu 42. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$ là:

A. $-\dfrac{1}{5}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Câu 43. Biết rằng $L=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x}+bx}>0$ là hữu hạn (với a,b là tham số). Khẳng định nào dưới đây đúng.

A. $a\ge 0$. **B.** $L=-\dfrac{3}{a+b}$ **C.** $L=\dfrac{3}{b-\sqrt{a}}$ **D.** $b>0$.

Câu 44. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}$ là:

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 1.

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị của a để $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+ax\right)$ là $+\infty$.

A. $a>\sqrt{2}$. **B.** $a<\sqrt{2}$. **C.** $a>2$. **D.** $a<2$.

Vấn đề 6. DẠNG VÔ ĐỊNH $\infty-\infty$

Câu 46. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(2x^3-x^2\right)$ là:

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** -1. **D.** $-\infty$.

Câu 47. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$ là:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 48. Biết rằng $a+b=4$ và $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)$ hữu hạn. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{b}{1-x^3}-\dfrac{a}{1-x}\right)$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -2.

Câu 49. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{1+2x^2}-x\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** $-\infty$.

Câu 50. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\infty$.

Câu 51. Biết rằng $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=a\sqrt{5}+b$. Tính $S=5a+b$.

A. $S=1$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=5$. **D.** $S=-5$.

Câu 52. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$ là:

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 53. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$ là:

A. $\sqrt[3]{3}+1$. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt[3]{3}-1$. **D.** $-\infty$.

Câu 54. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$ là:

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $+\infty$. **C.** -1. **D.** $-\infty$.

Câu 55. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** -1. **D.** $-\infty$.

Vấn đề 7. DẠNG VÔ ĐỊNH $0.\infty$

Câu 56. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\left[x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]$ là:

A. $+\infty$. B. -1. C. 0. D. $+\infty$.

Câu 57. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$ là:

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Câu 58. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}$ là:

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 59. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to0}x^2\left(\sin\pi x-\frac{1}{x^2}\right)$ là:

A. 0. **B.** -1. **C.** π. **D.** $+\infty$.

Câu 60. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(x^3+1\right)\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$ là:

A. 3. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

GIỚI HẠN HÀM SỐ

Vấn đề 1. Tìm giới hạn bằng định nghĩa

Phương pháp:

Sử dụng định nghĩa chuyển giới hạn của hàm số về giới hạn của dãy số.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm giới hạn các hàm số sau bằng định nghĩa :

1. $A=\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+x+1)$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$

3. $C=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x+2}{x-1}$

Lời giải.

1. Với mọi dãy (x_n) mà $\lim x_n=1$ ta có:

$A=\lim\left(3x_n^2+x_n+1\right)=3+1+1=5$

2. Với mọi dãy (x_n) mà $\lim x_n=1$ và $x_n\neq 1\ \forall n$ ta có:

$B=\lim\frac{(x_n-1)(x_n^2+x_n+1)}{x_n-1}=\lim\left(x_n^2+x_n+1\right)=3$.

3. Với mọi dãy (x_n) mà $\lim x_n=2$ và $x_n\neq 2\ \forall n$ ta có:

$B=\lim\frac{\sqrt{x_n+2}-2}{x_n-2}=\lim\frac{(x_n-2)}{(x_n-2)\left(\sqrt{x_n+2}+2\right)}=\lim\frac{1}{\sqrt{x_n+2}+2}=\frac{1}{4}$

4. Với mọi dãy (x_n) mà $\lim x_n=+\infty$ ta có:

$D=\lim\frac{3x_n+2}{x_n-1}=\lim\frac{3+\frac{2}{x_n}}{1-\frac{1}{x_n}}=3$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hàm số sau không có giới hạn:

1. $f(x)=\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$ khi $x\to 0$ **2.** $f(x)=\cos^5 2x$ khi $x\to -\infty$.

Lời giải.

1. Xét hai dãy $(x_n):x_n=\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+n2\pi\right)^2},(y_n):y_n=\frac{1}{(n\pi)^2}$

Ta có: $\lim x_n=\lim y_n=0$ và $\lim f(x_n)=1;\ \lim f(y_n)=0$.

Nên hàm số không có giới hạn khi $x\to 0$.

2. Tương tự ý 1 xét hai dãy: $x_n=n\pi;\ y_n=\frac{\pi}{4}+n\pi$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

Lời giải.

Với mọi dãy $(x_n):\lim x_n=x_0$ ta có: $\lim|f(x_n)|=0\Rightarrow\lim f(x_n)=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tìm giới hạn các hàm số sau bằng định nghĩa

1. $\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}$ **2.** $\lim_{x\to 2}\left(x^3+1\right)$ **3.** $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

4. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x+3}{x-2}$ **5.** $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2-x+1}{x+2}$. **6.** $\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{2x-1}$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{2x}$ **8.** $\lim_{x\to 1^+}\frac{4x-3}{x-1}$ **9.** $\lim_{x\to 2^-}\frac{3x-1}{x-2}$

Bài 2 Chứng minh rằng các hàm số sau không có giới hạn :

1. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ khi $x\to 0$ **2.** $f(x)=\cos x$ khi $x\to +\infty$

Bài 3 Bằng định nghĩa hãy tìm các giới hạn sau

1. $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x-1}$ **2.** $\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{(2-x)^4}$ **3.** $\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2}{2x^2+1}$

4. $\lim_{x\to -\infty}\left(x^2+x-1\right)$ **5.** $\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{\sqrt{\left(x^4+1\right)(2-x)}}$ **6.** $\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+3x+2}{|x+1|}$.

Bài 4 Chứng minh rằng các hàm số sau không có giới hạn

1. $f(x)=\cos\frac{1}{x^2}$ khi $x\to 0$ **2.** $f(x)=\sin 2x$ khi $x\to +\infty$

ĐÁP ÁN

Bài 1

1. Với mọi dãy $(x_n):\lim x_n=1$ ta có: $\lim\frac{x_n+1}{x_n-2}=-2$

Vậy $\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}=-2$.

2. $\lim_{x\to 2}\left(x^3+1\right)=9$ **3.** $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{1}{4}$

4. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x+3}{x-2}=1$ **5.** $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2-x+1}{x+2}=-\infty$.

6. Với mọi dãy $(x_n):\lim x_n=2$ ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{2x-1}=\lim\frac{3x_n+2}{2x_n-1}=\frac{3.1+2}{2.1-1}=5$$

7. Với mọi dãy $(x_n):\lim x_n=0$ ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{2x}=\lim\frac{\sqrt{x_n+4}-2}{2x_n}=\lim\frac{x_n}{2x_n\left(\sqrt{x_n+4}+2\right)}$$

$$=\lim\frac{1}{2\left(\sqrt{x_n+4}+2\right)}=\frac{1}{8}.$$

8. Với mọi dãy $(x_n):x_n>1,\ \forall n$ và $\lim x_n=1$ ta có:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{4x-3}{x-1}=\lim\frac{4x_n-3}{x_n-1}=+\infty.$$

9. Với mọi dãy $(x_n):x_n<2,\ \forall n$ và $\lim x_n=2$ ta có:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3x-1}{x-2}=\lim\frac{3x_n-1}{x_n-2}=-\infty.$$

Bài 2

1. Xét hai dãy số $x_n = \frac{1}{\pi + 2n\pi}, y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \Rightarrow \lim x_n = \lim y_n = 0$

Mà $\lim f(x_n) = \lim\left[\sin(\pi + 2n\pi)\right] = 0$

$\lim f(y_n) = \lim\left[\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)\right] = 1$

Suy ra $\lim f(x_n) \neq \lim f(y_n)$

Vậy hàm số f không có giới hạn khi $x \to 0$.

2. Xét hai dãy $x_n = 2n\pi, y_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow \lim x_n = \lim y_n = +\infty$

Mà $\lim f(x_n) = \lim\left[\cos(2n\pi)\right] = 1$

$\lim f(y_n) = \lim\left[\cos(\frac{\pi}{2} + n\pi)\right] = 0$

Suy ra $\lim f(x_n) \neq \lim f(y_n)$

Vậy hàm số f không có giới hạn khi $x \to +\infty$.

Bài 3

1. Với mọi dãy $(x_n): \lim x_n = 1$ ta có:

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = \lim \frac{2x_n^2 + x_n - 3}{x_n - 1} = \lim\left(2x_n + 3\right) = 5$.

2. Đáp số: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x+1}{\left(2-x\right)^4} = +\infty$

3. Đáp số: $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2}{2x^2 + 1} = \frac{3}{2}$

4. Đáp số: $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x^2 + x - 1\right) = +\infty$

5. Đáp số: $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{\left(x^4 + 1\right)\left(2 - x\right)}} = 0$

6. Do $x \to -1^- \Rightarrow |x+1| = -(x+1)$. Đáp số: $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x^2 + 3x + 2}{|x+1|} = -1$.

Bài 4

1. Xét hai dãy $(x_n),(y_n)$ xác định bởi $x_n = \sqrt{\frac{1}{2n\pi}}, y_n = \sqrt{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}}$

Ta có: $\lim x_n = \lim y_n = 0$

Nhưng: $\lim f(x_n) = 1;\ \lim f(y_n) = 0$ nên hàm số f không có giới hạn khi $x \to 0$.

2. Tương tự như bài trên

Bằng cách xét hai dãy: $(x_n): x_n = n\pi$ và $(y_n): y_n = \frac{\pi}{4} + n\pi$.

Vấn đề 2. Tìm giới hạn của hàm số

Bài toán 01: Tìm $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ biết $f(x)$ xác định tại x_0.

Phương pháp:

* Nếu $f(x)$ là hàm số cho bởi một công thức thì giá trị giới hạn bằng $f(x_0)$

* Nếu $f(x)$ cho bởi nhiều công thức, khi đó ta sử dụng điều kiện để hàm số có giới hạn (Giới hạn trái bằng giới hạn phải).

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+3\cos x+x}{2x+\cos^2 3x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2x}{\sqrt[3]{x+6}+2x-1}$

Lời giải.

1. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+3\cos x+x}{2x+\cos^2 3x}=\dfrac{\sin 0+3\cos 0+0}{2.0+\cos^2 0}=3$

2. Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2x}{\sqrt[3]{x+6}+2x-1}=\dfrac{\sqrt{2^2+3}-2.2}{\sqrt[3]{2+6}+2.2-1}=\dfrac{\sqrt{7}-4}{5}$.

Ví dụ 2. Xét xem các hàm số sau có giới hạn tại các điểm chỉ ra hay không? Nếu có hay tìm giới hạn đó?

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+2} & \text{khi } x<1\\ \dfrac{3x+2}{3} & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$ khi $x\to 1$;

2. $f(x)=\begin{cases}2x^2+3x+1 & \text{khi } x\ge 0\\ -x^2+3x+2 & \text{khi } x<0\end{cases}$ khi $x\to 0$

Lời giải.

1. Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x+2}{3}=\dfrac{5}{3}$.

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+2}=\dfrac{5}{3}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\dfrac{5}{3}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\dfrac{5}{3}$.

2. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x^2+3x+1)=1$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2+3x+2)=2\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\ne\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$.

Vậy hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x\to 0$.

Ví dụ 3. Tìm m để các hàm số:

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+mx+2m+1}{x+1} & \text{khi } x\ge 0\\ \dfrac{2x+3m-1}{\sqrt{1-x}+2} & \text{khi } x<0\end{cases}$ có giới hạn khi $x\to 0$.

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{1-x}}+mx+1 & \text{khi } x<1\\ 3mx+2m-1 & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$ có giới hạn khi $x\to 1$.

Lời giải.

1. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+mx+2m+1}{x+1}=2m+1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x+3m-1}{\sqrt{1-x}+2}=\dfrac{3m-1}{3}$

Hàm số có giới hạn khi $x\to 0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$

$\Leftrightarrow 2m+1=\frac{3m-1}{3} \Leftrightarrow m=-\frac{4}{3}$.

2. Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3mx+2m-1)=5m-1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x^2+x-2}{\sqrt{1-x}}+mx+1\right)$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\left(-(x+2)\sqrt{1-x}+mx+1\right)=m+1$$

Hàm số có giới hạn khi $x\to 1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$\Leftrightarrow 5m-1=m+1 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tìm giới hạn các hàm số sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x+1}{x+1}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{2\tan x+1}{\sin x+1}$

3. $C=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+2}-x+1}{3x+1}$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7x+1}+1}{x-2}$.

Bài 2 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+1}{x^2+x+4}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 2x-3\cos x}{\tan x}$

3. $C=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x^2-x+1}-\sqrt[3]{2x+3}}{3x^2-2}$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt[3]{3x+1}-2}$

Bài 3 Xét xem các hàm số sau có giới hạn tại các điểm chỉ ra hay không ? Nếu có hãy tìm giới hạn đó ?

1. $f(x)=\begin{cases}3x^3-5x^2+4 & \text{khi } x\ge 1\\ 3x-1 & \text{khi } x<1\end{cases}$ khi $x\to 1$

2. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x>2\\ 2x+1 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$ tại $x\to 2$.

Bài 4 Xét xem các hàm số sau có giới hạn tại các điểm chỉ ra hay không ? Nếu có hãy tìm giới hạn đó ?

1. $f(x)=\begin{cases}3x^2-5x+1 & \text{khi } x\ge 1\\ -3x+2 & \text{khi } x<1\end{cases}$ tại $x=1$.

2. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x>2\\ 2x+1 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$ tại $x=2$.

Bài 5

1. Tìm a để hàm số sau có giới hạn khi $x\to 2$

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax+1 & \text{khi } x>2\\ 2x^2-x+1 & \text{khi } x\le 2\end{cases}.$$

2. Tìm a để hàm số sau có giới hạn tại $x=0$

$$f(x)=\begin{cases}5ax^2+3x+2a+1 & \text{khi } x\ge 0\\ 1+x+\sqrt{x^2+x+2} & \text{khi } x<0\end{cases}.$$

Bài 6 Tìm a để hàm số

1. $f(x)=\begin{cases}5ax^2+3x+2a+1 & \text{khi } x\ge 0\\ 1+x+\sqrt{x^2+x+2} & \text{khi } x<0\end{cases}$ có giới hạn tại $x\to 0$

2. $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+1 & \text{khi } x>1\\ 2x^2-x+3a & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ có giới hạn khi $x\to 1$.

Bài 1

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x+1}{x+1}=\frac{1-1+1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

2.Ta có $B=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\tan x+1}{\sin x+1}=\frac{2\tan\frac{\pi}{6}+1}{\sin\frac{\pi}{6}+1}=\frac{4\sqrt{3}+6}{9}$.

3.Ta có: $C=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+2}-x+1}{3x+1}=\sqrt[3]{2}+1$.

4. Ta có: $D=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7x+1}+1}{x-2}=\frac{\sqrt[3]{8}+1}{1-2}=-3$.

Bài 2

1. $A=\frac{-1}{6}$ **2.** $B=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{9}{2}$ **3.** $C=\sqrt{2}-\sqrt[3]{5}$ **4.** $D=0$

Bài 3

1. Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(3x^3-5x^2+4\right)=2$

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(3x-1\right)=2$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$.

2. Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2+2x+4\right)=12$

$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(2x+1\right)=5$

Do đó không tồn tại giới hạn của f khi $x\to 2$.

Bài 4

1. Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-1=\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

2. Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=12\ne 5=\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$

Hàm số không có giới hạn khi $x\to 2$.

Bài 5

1. Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+ax+2)=2a+6$.

$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2x^2-x+1)=7$.

Hàm số có giới hạn khi $x\to 2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$

$\Leftrightarrow 2a+6=7\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$. Vậy $a=\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

2. Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=2a+1=1+\sqrt{2}=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\Rightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 6

1. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(5ax^2+3x+2a+1\right) = 2a+1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(1+x+\sqrt{x^2+x+2}\right) = 1+\sqrt{2}$

Vậy $2a+1 = 1+\sqrt{2} \Leftrightarrow a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+ax+2) = a+3$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(2x^2-x+3a) = 3a+1$.

Hàm số có giới hạn khi $x\to 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$\Leftrightarrow a+3 = 3a+1 \Leftrightarrow a = 1$. Vậy $a = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài toán 02. Tìm $A = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Dạng này ta gọi là dạng vô định $\dfrac{0}{0}$.

Để khử dạng vô định này ta sử dụng định lí Bozu cho đa thức:

Định lí: Nếu đa thức $f(x)$ có nghiệm $x = x_0$ thì ta có :

$$f(x) = (x-x_0)f_1(x).$$

*Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức thì ta phân tích $f(x) = (x-x_0)f_1(x)$ và $g(x) = (x-x_0)g_1(x)$. Khi đó $A = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, nếu giới hạn này có dạng $\dfrac{0}{0}$ thì ta tiếp tục quá trình như trên.

Chú ý :Nếu tam thức bậc hai ax^2+bx+c có hai nghiệm x_1, x_2 thì ta luôn có sự phân tích $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.

* Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm chứa căn thức thì ta nhân lượng liên hợp để chuyển về các đa thức, rồi phân tích các đa thức như trên.

Các lượng liên hợp:

1. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b$
2. $(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}) = a-b$
3. $(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}) = a-b$

* Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm chứa căn thức không đồng bậc ta sử dụng phương pháp tách, chẳng hạn:

Nếu $\sqrt[n]{u(x)}, \sqrt[m]{v(x)} \to c$ thì ta phân tích:

$$\sqrt[n]{u(x)}-\sqrt[m]{v(x)} = (\sqrt[n]{u(x)}-c)-(\sqrt[m]{v(x)}-c).$$

Trong nhiều trường hợp việc phân tích như trên không đi đến kết quả ta phải phân tích như sau:

$\sqrt[n]{u(x)}-\sqrt[m]{v(x)} = (\sqrt[n]{u(x)}-m(x))-(\sqrt[m]{v(x)}-m(x))$, trong đó $m(x)\to c$.

* Một đẳng thức cần lưu ý:

$$a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $A = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$

2. $B = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-5x^3+2x^2+6x-4}{x^3-x^2-x+1}$

Lời giải.

1. Ta có: $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)$

Suy ra: $\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1$

Do đó: $A = \lim\limits_{x\to 1}\left(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1\right) = n$.

2. Ta có: $x^5 - 5x^3 + 2x^2 + 6x - 4 = (x-1)^2(x+2)(x^2-2)$

$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$

Do đó: $B = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+2)(x^2-2)}{x+1} = -\frac{3}{2}$.

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

1. $C = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$ **2.** $D = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2x)^2(1+3x)^3 - 1}{x}$

Lời giải.

1. Ta có: $(1+mx)^n = 1 + mnx + \frac{m^2n(n-1)x^2}{2} + m^3x^3.A$

Với $A = C_n^3 + mxC_n^4 + ... + \left(mx\right)^{n-3}C_n^n$

$\left(1+nx\right)^m = 1 + mnx + \frac{n^2m(m-1)x^2}{2} + n^3x^3B$

Với $B = C_m^3 + nxC_m^4 + ... + \left(nx\right)^{m-3}C_m^m$

Do đó: $C = \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{m^2n(n-1) - n^2m(m-1)}{2} + x\left(m^3A - n^3B\right)\right]$

$= \frac{m^2n(n-1) - n^2m(m-1)}{2} = \frac{mn(n-m)}{2}$.

2. Ta có: $\frac{\left(1+2x\right)^2\left(1+3x\right)^3 - 1}{x} = \frac{\left(1+2x^2\right)\left[\left(1+3x\right)^3 - 1\right]}{x} +$

$+\frac{(1+2x)^2 - 1}{x} = \left(1+2x\right)^2\left(9 + 27x + 27x^2\right) - (4+4x)$

Suy ra: $D = \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+2x\right)^2\left(9+27x+27x^2\right) - (4+4x)\right] = 5$

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn sau:

1. $A = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1} - x}{x^2 - 1}$ **2.** $B = \lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x+2} - x}{\sqrt{3x-2} - 2}$

Lời giải.

1. Ta có: $A = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2x - 1 - x^2}{(x-1)(x+1)(\sqrt{2x-1} + x)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{(x+1)(\sqrt{2x-1} + x)} = 0$

2. Ta có: $B = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(3x+2-x^3)(\sqrt{3x-2} + 2)}{3(x-2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)}$

$= \lim\limits_{x\to 2}\frac{-(x^2+2x+1)(\sqrt{3x-2} + 2)}{3(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)} = -1$.

Ví dụ 4. Tìm các giới hạn sau:

1. $B=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1}$ **2.** $C=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}.\sqrt[3]{3x-2}.\sqrt[4]{4x-3}-1}{x-1}$

Lời giải.

1. Đặt $t=x-1$ ta có: $B=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{2t+1}-1}{t}=\frac{2}{3}$

2. Ta có: $\sqrt{2x-1}.\sqrt[3]{3x-2}.\sqrt[4]{4x-3}-1=\sqrt{2x-1}.\sqrt[3]{3x-2}\left(\sqrt[4]{4x-3}-1\right)+$

$+\sqrt{2x-1}\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)+\sqrt{2x-1}-1$

Mà: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x-2}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{4x-3}-1}{x-1}=1$

Nên ta có: $C=1+1+1=3$.

Ví dụ 5. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt{5x-1}}{x-1}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

Lời giải.

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7x+1}-2-(\sqrt{5x-1}-2)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7x+1}-2}{x-1}-\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-1}-2}{x-1}=I-J$

$I=\lim\limits_{x\to 1}\frac{7(x-1)}{(x-1)(\sqrt[3]{(7x-1)^2}+2\sqrt[3]{7x-1}+4)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{7}{\sqrt[3]{(7x-1)^2}+2\sqrt[3]{7x-1}+4}=\frac{7}{12}$.

$J=\lim\limits_{x\to 1}\frac{5(x-1)}{(x-1)(\sqrt{5x-1}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{5}{\sqrt{5x-1}+1}=\frac{5}{3}$

Vậy $A=-\frac{2}{3}$.

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\lim\limits_{x\to 7}\frac{\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}-\frac{\sqrt[3]{x+20}-3}{x-7}}{\frac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}}$

Mà: $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}=\lim\limits_{x\to 7}\frac{1}{\sqrt{x+2}+3}=\frac{1}{6}$

$\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{x+20}-3}{x-7}=\lim\limits_{x\to 7}\frac{1}{(\sqrt[3]{x+20})^2+3\sqrt[3]{x+20}+9}=\frac{1}{27}$

$\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}=\lim\limits_{x\to 7}\frac{1}{(\sqrt[4]{x+9})^3+2(\sqrt[4]{x+9})^2+4\sqrt[4]{x+9}+8}=\frac{1}{32}$.

Vậy $B=\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{27}}{\frac{1}{32}}=\frac{112}{27}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tìm các gới hạn sau :

1. $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8}$

3. $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^3-(1-4x)^4}{x}$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

Bài 2 Tìm các giới hạn sau :

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}$ $(m,n\in\mathbb{N}^*)$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}$ $(n\in\mathbb{N}^*,a\neq 0)$

3. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{\sqrt[m]{1+bx}-1}$ với $ab\neq 0$ **4.** $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\alpha x}\sqrt[3]{1+\beta x}\sqrt[4]{1+\gamma x}-1}{x}$ với $\alpha\beta\gamma\neq 0$.

Bài 3 Tìm các giới hạn sau :

1. $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3-3x-2}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^3+2x-3}$

3. $C=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-x}{x^2-4x+3}$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{2x+1}-1}$

5. $E=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{2x+2}-2}$ **6.** $F=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}-1}{x}$

7. $M=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$ **8.** $N=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$

9. $G=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}\sqrt[n]{1+bx}-1}{x}$ **10.** $V=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$

11. $K=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)...\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{(1-x)^{n-1}}$

12. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}$

Bài 4 Tìm các giới hạn sau :

1. $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3-8}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x^2+2}{x^3+2x-3}$

3. $C=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-4x+3}$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{2x+1}-1}$

5. $E=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{2x+2}-2}$ **6.** $F=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}-1}{x}$

7. $M=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{1-\cos 3x}$ **8.** $N=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{\sqrt{1+x}-1}$

9. $V=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}$ **10.** $K=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)...\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{\left(1-x^2\right)^{n-1}}$.

Bài 5 Tìm các giới hạn sau

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-\sqrt[3]{2x+1}}{x}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{\sqrt[3]{5x+3}-2}$

3. $C=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[4]{2x+3}+\sqrt[3]{2+3x}}{\sqrt{x+2}-1}$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x-\sqrt[3]{3x+2}}$.

Bài 6 Tìm các giới hạn sau

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+4x}-\sqrt[3]{7+6x}}{x^3+x^2-x-1}$

Bài 1

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2-2x-2)}{(x-1)(x-3)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x-2}{x-3}=\dfrac{3}{2}$.

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^3-2^3}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-1)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+2x+4}=1$.

3. Ta có: $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^3-(1-4x)^4}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^3-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-4x)^4-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x[(1+3x)^2+(1+3x)+1]}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4x(2-4x)[(1-4x)^2+1]}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}3[(1+3x)^2+(1+3x)+1]+\lim\limits_{x\to 0}4(2-4x)[(1-4x)^2+1]=25$

4.Ta có: $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x^3+11x^2+6x}{x}=6$.

Bài 2

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)}{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1}{x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1}=\dfrac{n}{m}$.

2. Cách 1: Nhân liên hợp

Ta có:

$B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[n]{1+ax}-1)(\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}}+...+\sqrt[n]{1+ax}+1)}{x(\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}}+...+\sqrt[n]{1+ax}+1)}$

$B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}}+...+\sqrt[n]{1+ax}+1}=\dfrac{a}{n}$.

Cách 2: Đặt ẩn phụ

Đặt $t=\sqrt[n]{1+ax}\Rightarrow x=\dfrac{t^n-1}{a}$ và $x\to 0\Leftrightarrow t\to 1$

$\Rightarrow B=a\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t-1}{t^n-1}=a\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t-1}{(t-1)(t^{n-1}+t^n+...+t+1)}=\dfrac{a}{n}$.

3. Áp dụng bài toán trên ta có:

$A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[m]{1+bx}-1}=\dfrac{a}{n}.\dfrac{m}{b}=\dfrac{am}{bn}$.

4. Ta có: $\sqrt{1+\alpha x}\sqrt[3]{1+\beta x}\sqrt[4]{1+\gamma x}-1=$

$=\sqrt{1+\alpha x}\sqrt[3]{1+\beta x}(\sqrt[4]{1+\gamma x}-1)+\sqrt{1+\alpha x}((\sqrt[3]{1+\beta x}-1)+(\sqrt{1+\alpha x}-1)$

$B=\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+\alpha x}\sqrt[3]{1+\beta x})\dfrac{\sqrt[4]{1+\gamma x}-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+\alpha x}\dfrac{\sqrt[3]{1+\beta x}-1}{x}$

$$+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\alpha x}-1}{x}$$

$B=\frac{\gamma}{4}+\frac{\beta}{3}+\frac{\alpha}{2}$

Bài 3.

1. Ta có: $A=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(x^2+2x+1)}=\frac{1}{3}$

2. Ta có: $B=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+x^2+x-2)}{(x-1)(x^2+x+3)}=\frac{1}{5}$

3. Ta có: $C=\lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-1)\left(\sqrt{2x+3}+x\right)}=\frac{-1}{3}$

4. Ta có: $D=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt[4]{(2x+1)^3}+\sqrt[4]{(2x+1)^2}+\sqrt[4]{2x+1}+1\right)}{2x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\frac{2}{3}$

5. Ta có: $E=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{2x+2}-2}=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{4x-1}-3}{\sqrt[4]{2x+2}-2}-\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt[4]{2x+2}-2}=A-B$

$$A=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{4x-1}-3}{\sqrt[4]{2x+2}-2}=\lim_{x\to 7}\frac{2\left(\sqrt[4]{2x+2}+2\right)\left(\sqrt[4]{\left(2x+2\right)^2}+4\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(4x-1\right)^2}+3\sqrt[3]{4x-1}+9\right)}=\frac{64}{27}$$

$$B=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt[4]{2x+2}-2}=\lim_{x\to 7}\frac{\left(\sqrt[4]{2x+2}+2\right)\left(\sqrt[4]{\left(2x+2\right)^2}+4\right)}{2\left(\sqrt{x+2}+3\right)}=\frac{8}{3}$$

$E=A-B=\frac{64}{27}-\frac{8}{3}=\frac{-8}{27}$

6. Ta có: $F=\frac{9}{2}$

7. Ta có: $M=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+1}-(2x+1)}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+6x}-(2x+1)}{x^2}=0$

8. Ta có: $N=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+bx}-1}{x}=\frac{a}{m}-\frac{b}{n}$

9. Ta có: $G=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}\left(\sqrt[n]{1+bx}-1\right)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}-1}{x}=\frac{b}{n}+\frac{a}{m}$

10. Ta có: $V=\lim_{x\to 0}\frac{(1+nx)^m-(1+mnx)}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+mnx)}{x^2}$

$=\frac{mn(n-m)}{2}$.

11. Ta có: $K=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1+\sqrt{x})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)...(\sqrt[n]{x^{n-1}}+...+1)}=\frac{1}{n!}$.

12. $L=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-1\right]\left[\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n+1\right]}{x\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n}=2n$.

Bài 4

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2x-1)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\dfrac{1}{4}$

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)(x^2-2)}{(x-1)(x^2+x+3)}=-\dfrac{2}{5}$

3. Ta có: $C=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2(x-3)}{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\dfrac{1}{6}$

4.Ta có: $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}{2x\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right]}=\dfrac{1}{3}$

5. Ta có: $E=\left(\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{4x-1}-3}{x-7}-\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}\right)\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{\sqrt[4]{2x+2}-2}$

Mà: $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{4x-1}-3}{x-7}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{4(x-7)}{(x-7)\left[\sqrt[3]{(4x-1)^2}+3\sqrt[3]{4x-1}+9\right]}=\dfrac{4}{27}$

$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}=\dfrac{1}{6};\ \lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{\sqrt[4]{2x+2}-2}=16$

Do đó: $E=16\left(\dfrac{4}{27}-\dfrac{1}{6}\right)=-\dfrac{8}{27}$.

6. Đặt $y=\sqrt[n]{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}\Rightarrow y\to 1$ khi $x\to 0$

Và: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y^n-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x+1)(3x+1)(4x+1)-1}{x}=9$

Do đó: $F=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y^n-1}{x\left(y^{n-1}+y^{n-2}+...+y+1\right)}=\dfrac{9}{n}$

7. Ta có: $M=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2}.\dfrac{x^2}{1-\cos 3x}=2.\dfrac{2}{9}=\dfrac{4}{9}$.

8. Ta có: $N=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-1}{x}-\dfrac{\sqrt[n]{1+bx}-1}{x}\right).\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$

$=\left(\dfrac{a}{m}-\dfrac{b}{n}\right).2=\dfrac{2(an-bm)}{mn}$.

9. Ta có: $V=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\left(1+mx\right)^n-1}{x^2}-\dfrac{(1+nx)^m-1}{x^2}\right]\dfrac{x^2}{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}$

$=\dfrac{mn(n-m)}{2}.2=mn(n-m)$.

10. Ta có: $K=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(1+\sqrt{x})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)...(\sqrt[n]{x^{n-1}}+...+1)}=\dfrac{1}{n!}$.

Bài 5

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}-1}{x}$

Mà: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{x\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{\sqrt{4x+1}+1}=2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{2x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left[\sqrt[3]{(2x+1)^2}+\sqrt[3]{2x+1}+1\right]}=\frac{2}{3}$$

Vậy $A=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$.

Chú ý: Ta có thể sử dụng kết quả ở ý 1 ví dụ 6.15 để tìm giới hạn trên như sau:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+1}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{2x+1}-1}{x}=\frac{4}{2}-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$$

2. Ta có: $B=\lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)\left[\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4\right]}{5(x-1)\left[\sqrt{4x+5}+3\right]}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4\left[\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4\right]}{5\left(\sqrt{4x+5}+3\right)}=\frac{2}{5}.$$

3. Ta có: $C=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[4]{2x+3}-1}{\sqrt{x+2}-1}-\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{3x+2}+1}{\sqrt{x+2}-1}$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\dfrac{\sqrt[4]{2(x+1)+1}-1}{x+1}}{\dfrac{\sqrt{(x+1)+1}-1}{x+1}}-\lim_{x\to -1}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{-3(x+1)+1}-1}{x+1}}{\dfrac{\sqrt{(x+1)+1}-1}{x+1}}=\frac{\frac{2}{4}}{\frac{1}{2}}-\frac{-1}{\frac{1}{2}}=3$$

4. Ta có: $D=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-x-2\right)\left[x^2+x.\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}\right]}{(x^3-3x-2)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left[x^2+x.\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}\right]}{(x+1)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}=1.$$

Bài 6

1. Cách 1: Đặt $t=\sqrt[3]{3x+1}\Rightarrow x=\frac{t^3-1}{3}$ và $x\to 0\Leftrightarrow t\to 1$

Nên $A=\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{1+\frac{t^3-1}{3}}-t}{\left(\frac{t^3-1}{3}\right)^2}=9\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{\frac{t^3+2}{3}}-t}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2}$

$$=3\lim_{t\to 1}\frac{t^3-3t^2+2}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2\left(\sqrt{\frac{t^3+2}{3}}+t\right)}$$

$$=3\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)^2(t+2)}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2\left(\sqrt{\frac{t^3+2}{3}}+t\right)}$$

$$=3\lim_{t\to 1}\frac{t+2}{(t^2+t+1)^2\left(\sqrt{\frac{t^3+2}{3}}+t\right)}=\frac{1}{2}.$$

Cách 2: Ta có:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-(1+x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1+2x}+1+x}-\lim_{x\to 0}\frac{-3-x}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}+(1+x)\sqrt[3]{1+3x}+(1+x)^2}$$

Do đó: $A=\frac{1}{2}$.

2. Ta có: $B=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{5+4x}-\sqrt[3]{7+6x}}{\left(x+1\right)^2\left(x-1\right)}$

Đặt $t=x+1$. Khi đó:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{5+4x}-\sqrt[3]{7+6x}}{\left(x+1\right)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+4t}-\sqrt[3]{1+6t}}{t^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4t}-(2t+1)}{t^2}-\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+6t}-(2t+1)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-4}{\sqrt{1+4t}+2t+1}-\lim_{t\to 0}\frac{-8t-12}{\sqrt[3]{(1+6t)^2}+(2t+1)\sqrt[3]{(1+6t)^2}+(2t+1)^2}=2.$$

Do đó: $B=-1$.

Bài toán 03: Tìm $B=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$, trong đó $f(x),g(x)\to\infty$, dạng này ta còn gọi là dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$.

Phương pháp: Tương tự như cách khử dạng vô định ở dãy số. Ta cần tìm cách đưa về các giới hạn:

* $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} x^{2k}=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} x^{2k+1}=+\infty\ (-\infty)$.

* $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{k}{x^n}=0\ \ (n>0;k\neq 0)$.

* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty\ (-\infty)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{k}{f(x)}=0\ \ (k\neq 0)$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim_{x\to+\infty}\frac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}$ **2.** $B=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-3x+4}+3x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$

Lời giải.

1. Ta có: $A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(4+\frac{1}{x}\right)^3\left(2+\frac{1}{x}\right)^4}{\left(\frac{3}{x}+2\right)^7}=8$

2. Ta có: $B=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}+3}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}=\frac{1}{2}$

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{2x+2}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}-1}$

Lời giải.

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(2+\frac{2}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{2}{x}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{3-\frac{2}{x^2}}+|x|\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{|x|}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{3-\frac{2}{x^2}}-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{|x|}\right)}=\sqrt{3}$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tìm các giới hạn sau:

1. $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{3x^2+2}}{5x+\sqrt{x^2+1}}$ **2.** $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}}$

3. $E=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$ **4.** $F=\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{4x^2+1}-x)$

5. $M=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$ **6.** $N=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+2x}-2x\right)$

7. $H=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}-\sqrt{4x^2+2}\right)$

7. $K=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}-2x\right)$

Bài 2 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+5x+1}{2x^2+x+1}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a_0x^n+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+...+b_{m-1}x+b_m}$ $(a_0b_0\neq 0)$.

Bài 3 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{3x^3+1}-\sqrt{2x^2+x+1}}{\sqrt[4]{4x^4+2}}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x^2+1}-2x+1}{\sqrt[3]{2x^3-2}+1}$.

Bài 4 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2x+1)^3(x+2)^4}{(3-2x)^7}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-3x+4}-2x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$

3. $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{3x^2+2}}{5x-\sqrt{x^2+1}}$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}}$.

Bài 5 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt[3]{2x^3+x-1}\right)$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)$

3. $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}-2x\right)$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$.

Bài 6 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-2\sqrt{x^2-x}+x\right)$

2. $B=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$

Bài 7 Tìm các giới hạn sau

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0x^n+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+...+b_{m-1}x+b_m}$, $(a_0b_0\neq 0)$

2. $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt[3]{8x^3+x-1}}{\sqrt[4]{x^4+3}}$

3. $C=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2}+\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{x^2+1}-x}$

4. $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x^2+1}+2x+1}{\sqrt[3]{2x^3+x+1}+x}$.

Bài 1

1. Ta có: $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\sqrt{3+\dfrac{2}{x^2}}}{5+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{6}$

2. Ta có: $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^6}+\dfrac{1}{x^2}+1}}{x^2\sqrt{\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^2}+1}}=1$

3. Ta có: $E=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\dfrac{1}{2}$

4. Ta có: $F=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\left(-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-1\right)=-\infty$

5. Ta có: $M=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=\begin{cases}2 & \text{khi } x\to+\infty\\ -2 & \text{khi } x\to-\infty\end{cases}$

6. Ta có: $N=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt[3]{(8x^3+2x)^2}+2x\sqrt[3]{8x^3+2x}+4x^2}=0$

7. Ta có: $H=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{16x^4+3x+1}-(4x^2+2)}{\sqrt[4]{16x^4+3x+1}+\sqrt{4x^2+2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{16x^4+3x+1-(4x^2+2)^2}{\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}+\sqrt{4x^2+2}\right)\left(\sqrt{16x^4+3x+1}+4x^2+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-16x^2+3x-3}{\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}+\sqrt{4x^2+2}\right)\left(\sqrt{16x^4+3x+1}+4x^2+2\right)}$

Suy ra $H=0$.

8. Ta có: $K=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2-x+1+2\sqrt{(x^2+1)(x^2-x)}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}+2x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4(x^4-x^3+x^2-x)-\left(2x^2+x-1\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}+2x\right)\left(2\sqrt{(x^2+1)(x^2-x)}+2x^2+x-1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4(x^4-x^3+x^2-x)-\left(2x^2+x-1\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}+2x\right)\left(2\sqrt{(x^2+1)(x^2-x)}+2x^2+x-1\right)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8x^3+7x^2-2x-1}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}+2x\right)\left(2\sqrt{(x^2+1)(x^2-x)}+2x^2+x-1\right)}=-\frac{1}{2}$$

Bài 2

1. Ta có: $A=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(3+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{3}{2}$

2. Ta có: $B=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n(a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m})}$

* Nếu $m=n\Rightarrow B=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m}}=\frac{a_0}{b_0}$.

* Nếu $m>n\Rightarrow B=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}}{x^{m-n}(b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m})}=0$

(Vì tử $\to a_0$, mẫu $\to 0$).

* Nếu $m<n$

$$\Rightarrow B=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{n-m}(a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n})}{b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m}}=\begin{cases}+\infty \text{ khi } a_0.b_0>0\\ -\infty \text{ khi } a_0b_0<0\end{cases}.$$

Bài 3

1. Ta có: $A=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt[3]{3+\frac{1}{x^3}}+x\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-x\sqrt[4]{4+\frac{2}{x^4}}}=-\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

2. $B=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{x(\sqrt[3]{2-\frac{2}{x^3}}+\frac{1}{x})}=\frac{x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{\sqrt[3]{2-\frac{2}{x^3}}+\frac{1}{x}}=+\infty$

(do tử $\to+\infty$, mẫu $\to\sqrt[3]{2}$).

Bài 4.

1. $A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)^3\left(1+\frac{2}{x}\right)^4}{\left(\frac{3}{x}-2\right)^7}=-\frac{1}{16}$

2. $B=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}-2}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}=2$

3. $C=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}}{5-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

4. $D=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^2}+1}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}}=-1$.

Bài 5

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt[3]{2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}\right)$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}\right)=-\infty$$

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=-\infty$

3. Ta có: $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+1}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x}$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}=\frac{1}{2}.$$

4. Ta có:

$D=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x\right)+\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)=M+N$

$M=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+x.\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+x^2}=\frac{1}{3}$

$N=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}=-\frac{1}{2}$

Do đó: $B=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$.

Bài 6 Ta có: $\sqrt{x^2+x+1}-2\sqrt{x^2-x}+x=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)^2-4(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x}$

$$=\frac{2x\sqrt{x^2+x+1}+1+5x-2x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x}$$

$$=\frac{2x\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x}+\frac{1+5x}{\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x}$$

$$=\frac{2x(x+1)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}+$$

$$+\frac{1+5x}{\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x}.$$

Do đó: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{2}{x}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}+$

$$+\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+5}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{4}+\frac{5}{4}=\frac{3}{2}$$

2. Ta có: $\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x=\frac{2x^2+2x+2x\sqrt{x^2+2x}-4x^2-4x}{\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x}$

$$=2x\frac{\sqrt{x^2+2x}-x-1}{\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$=\frac{-2x}{(\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}.$$

Nên $B=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{(\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x})}=-\frac{1}{4}.$$

Bài 7

1. Ta có: $A=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n(a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m})}$

- Nếu $m=n\Rightarrow B=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m}}=\frac{a_0}{b_0}$.

- Nếu $m>n\Rightarrow B=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}}{x^{m-n}(b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m})}=0$

(Vì tử $\to a_0$, mẫu $\to 0$).

- Nếu $m<n$, ta có:

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{n-m}(a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n})}{b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m}}=\begin{cases}+\infty \text{ khi } a_0.b_0>0\\-\infty \text{ khi } a_0b_0<0\end{cases}.$$

2. Ta có: $B=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}}+x.\sqrt[3]{8+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}}{|x|\sqrt[4]{1+\frac{3}{x^4}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{8+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}}{\sqrt[4]{1+\frac{3}{x^4}}}=4$.

3. Ta có: $C=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4-\frac{2}{x^2}}+|x|\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4-\frac{2}{x^2}}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}{-\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{3}{2}$

4. Ta có: $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}+\dfrac{1}{x^6}}+\dfrac{1}{x}\right)}=+\infty$.

Bài toán 04: Dạng vô định: $\infty-\infty$ và $0.\infty$

Phương pháp:

Những dạng vô định này ta tìm cách biến đổi đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau: $A=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3-3x^2}+\sqrt{x^2-2x})$

Lời giải.

Ta có: $\sqrt[3]{x^3-3x^2}+\sqrt{x^2-2x}=(\sqrt[3]{x^3-3x^2}-x)+(\sqrt{x^2-2x}+x)$

$$=\frac{-3x^2}{\sqrt[3]{(x^3-3x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3-3x^2}+x^2}+\frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}-x}$$

$$\Rightarrow A=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{\sqrt[3]{(1-\frac{3}{x})^2}+\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}+1}+\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{-\sqrt{1-\frac{2}{x}}-1}=0.$$

Ví dụ 2. Tìm giới hạn sau: $B=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$

Lời giải.

Ta có: $\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x=\dfrac{2x^2+2x+2x\sqrt{x^2+2x}-4x^2-4x}{\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x}$

$$=2x\frac{\sqrt{x^2+2x}-x-1}{\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$=\frac{-2x}{(\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}.$$

$$\Rightarrow B=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{(\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}$$

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x})}=-\frac{1}{4}.$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$

2. $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2-x+1}\right)$

3. $C=\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n)}-x]$

Bài 2 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$

2. $B=\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{4x^2+1}-x)$

3. $C=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1})$

4. $D=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{8x^3+2x}-2x)$

5. $E=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}-\sqrt{4x^2+2})$ **6.** $F=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\sqrt[3]{1-x^3})$.

Bài 1

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2-x+1}-x)(\sqrt{x^2-x+1}+x)}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\frac{1}{2}.$$

2. $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-\sqrt{4x^2-x+1})(2x+\sqrt{4x^2-x+1})}{2x-\sqrt{4x^2-x+1}}$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{2x-\sqrt{4x^2-x+1}}=\frac{1}{4}.$$

3. Đặt $y=\sqrt[n]{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)}$

$$\Rightarrow y^n-x^n=(y-x)(y^{n-1}+y^{n-1}x+...+x^{n-1})\Rightarrow y-x=\frac{y^n-x^n}{y^{n-1}+y^{n-1}x+...+x^{n-1}}$$

$$\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y^n-x^n}{y^{n-1}+y^{n-2}x+...+x^{n-1}}$$

$$\Rightarrow C=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{y^n-x^n}{x^{n-1}}}{\dfrac{y^{n-1}+y^{n-1}x+...+x^{n-1}}{x^{n-1}}}.$$

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y^n-x^n}{x^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(a_1+a_2+...+a_n+\dfrac{b_2}{x}+\dfrac{b_3}{x^2}+...+\dfrac{b_n}{x^{n-1}})$

$=a_1+a_2+...+a_n$.

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y^kx^{n-1-k}}{x^{n-1}}=1\ \forall k=0,...,n-1\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y^{n-1}+y^{n-2}x+...+x^{n-1}}{x^{n-1}}=n.$$

Vậy $C=\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$.

Bài 2

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\dfrac{1}{2}$

2. $B=-\infty$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}=-1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}=1$.

4. $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt[3]{(8x^3+2x)^2}+2x\sqrt[3]{(8x^3+2x)}+4x^2}=0$

5. $E=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}-2x\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+2}-2x\right)=0$

6. $F=-\infty$.

Bài toán 05: Dạng vô định các hàm lượng giác

Phương pháp:

Ta sử dụng các công thức lượng giác biến đổi về các dạng sau:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$, từ đây suy ra $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\tan u(x)}{u(x)}=1$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{1-\sqrt{\cos 2x}}$

Lời giải.

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}\frac{x^2}{\sin^2 x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}.\frac{x^2}{\sin^2 x}$

Mà: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}.\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}=-\frac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.\frac{1}{\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\cos x}+1}=\frac{1}{6}$

Do đó: $A=-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{12}$.

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}}{\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}}$

Mà: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+1)-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1+2x}+x+1}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+3}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{\left(1+3x\right)^2}}$

$=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}.\frac{1}{1+\sqrt{\cos 2x}}=1$

Vậy $B=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}x^3\sin\frac{1}{x^2}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\sin x+\cos^3 x\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

Lời giải.

1. Ta có: $0\le\left|x^3\sin\frac{1}{x^2}\right|\le x^3$

Mà $\lim\limits_{x\to 0}x^3=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\left|x^3\sin\frac{1}{x^2}\right|=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}x^3\sin\frac{1}{x^2}=0$

Vậy $A=0$.

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\sin x+\cos^3 x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

Mà: $0\le\left|\frac{2\sin x+\cos^2 x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right|\le\frac{3}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to 0$ khi $x\to+\infty$.

Do đó: $B = 0$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tìm giới hạn sau: $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}$

Bài 2 Tìm các giới hạn sau:

1. $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin mx-\cos mx}{1+\sin nx-\cos nx}$ **2.** $B = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2}$.

Bài 3 Tìm các giới hạn sau:

1. $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{2\sin\dfrac{3x}{2}}$ **2.** $B = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x(\sin 3x-\sin 4x)}$

3. $C = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}$ **4.** $D = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin 3x}-\cos 2x}$

Bài 4 Tìm các giới hạn sau:

1. $A = \lim\limits_{x\to 1}.\dfrac{\sin(\pi x^m)}{\sin(\pi x^n)}$ **2.** $B = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\pi}{2}-x)\tan x$

3. $C = \lim\limits_{x\to 0}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}\quad(\alpha>0)$ **4.** $D = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

Bài 5. Tìm các giới hạn sau

1. $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 4x}{\cos 5x-\cos 6x}$ **2.** $B = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1+2\sin 2x}}{\sin 3x}$

3. $C = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[4]{\cos x}}$ **4.** $D = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^4 2x}{\sin^4 3x}$

5. $E = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\sin(\tan x)}$ **6.** $F = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\sin x+2\cos x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

7. $H = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{\cos ax}-\sqrt[m]{\cos bx}}{\sin^2 x}$ **8.** $M = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[n]{\cos ax}}{x^2}$.

Bài 6. Tìm các giới hạn sau

1. $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 4x}{\cos 5x-\cos 6x}$ **2.** $B = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1+2\sin 2x}}{\sin 3x}$

3. $C = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[4]{\cos x}}$ **4.** $D = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^4 2x}{\sin^4 3x}$

5. $E = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\sin(\tan x)}$ **6.** $F = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\sin x+2\cos x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

7. $H = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{\cos ax}-\sqrt[m]{\cos bx}}{\sin^2 x}$ **8.** $M = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{1-\cos 2x}$.

Bài 1 Ta có: $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{ax}{2}}{x^2} = \dfrac{a}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{ax}{2}}{\dfrac{ax}{2}}\right)^2 = \dfrac{a}{2}$.

Bài 2

1. Ta có: $\frac{1+\sin mx-\cos mx}{1+\sin nx-\cos nx}=\frac{2\sin^2\frac{mx}{2}+2\sin\frac{mx}{2}\cos\frac{mx}{2}}{2\sin^2\frac{nx}{2}+2\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{nx}{2}}$

$$=\frac{m}{n}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{\frac{mx}{2}}.\frac{\frac{nx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}}.\frac{\sin\frac{mx}{2}+\cos\frac{mx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}+\cos\frac{nx}{2}}$$

$$A=\frac{m}{n}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{\frac{mx}{2}}.\lim_{x\to 0}\frac{\frac{nx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}+\cos\frac{mx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}+\cos\frac{nx}{2}}=\frac{m}{n}.$$

2. Ta có:

$$\frac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2}=\frac{1-\cos x+\cos x\cos 2x(1-\cos 3x)+\cos x(1-\cos 2x)}{x^2}$$

$$=\frac{1-\cos x}{x^2}+\cos x.\cos 2x\frac{1-\cos 3x}{x^2}+\cos x\frac{1-\cos 2x}{x^2}$$

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x.\cos 2x\frac{1-\cos 3x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\frac{1-\cos 2x}{x^2}=3$$

Bài 3

1. Ta có: $A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin\frac{3x}{2}}=\lim_{x\to 0}x(\frac{\sin x}{x})^2.\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}=0$.

2. $B=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}}{-2x\cos\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to 0}(\frac{5}{2}.\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}).\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos\frac{7x}{2}}=\frac{5}{2}$.

3. $C=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x}{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x(1+\sqrt[3]{\cos 2x}+\sqrt[3]{\cos^2 2x})}{1-\cos 2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x(1+\sqrt[3]{\cos 2x}+\sqrt[3]{\cos^2 2x})}{2\sin^2 x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}(\frac{\tan 2x}{2x})^2.(\frac{x}{\sin x})^2(1+\sqrt[3]{\cos 2x}+\sqrt[3]{\cos^2 2x}).$$

$\Rightarrow C=6$.

4. Ta có: $D=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sqrt{1+x\sin 3x}-\cos 2x}{x^2}}$

Mà : $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin 3x}-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin 3x}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

$$=3\lim_{x\to 0}(\frac{\sin 3x}{3x}.\frac{1}{\sqrt{1+x\sin 3x}+1})+2=\frac{7}{2}.$$

Vậy: $D=\frac{7}{2}$.

Bài 4

1. Ta có:

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi(1-x^m)}{\sin\pi(1-x^n)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi(1-x^m)}{\pi(1-x^m)}.\lim_{x\to 1}\frac{\pi(1-x^n)}{\sin\pi(1-x^n)}.\lim_{x\to 1}\frac{1-x^n}{1-x^m}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^n}{1-x^m}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1)}{(1-x)(x^{m-1}+x^{m-2}+...+1)}=\frac{n}{m}.$$

2. Ta có: $B=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)\frac{\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}.\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$.

3. Ta có: $0\le|x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}|<x^{\alpha}$. Mà $\lim_{x\to 0}x^{\alpha}=0$

Nên theo nguyên lí kẹp $\Rightarrow A_{39}=0$.

4. Trước hết ta có: $\sin x<x\quad\forall x>0$

Ta có: $\left|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right|=\left|2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}.\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|$

$$<\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Mà $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$ nên $D=0$.

Bài 5.

1. Ta có: $A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{11x}{2}\sin\frac{x}{2}}=\frac{7}{11}$

2. Ta có $B=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x}{\sin 3x\left(1+\sqrt[3]{1+2\sin 2x}+\sqrt[3]{(1+2\sin 2x)^2}\right)}=-\frac{4}{9}$

3. Ta có: $C=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 2x}{x^2}}{\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x^2}+\frac{1-\sqrt[4]{\cos x}}{x^2}}=-96$

4. Ta có: $D=\frac{16}{81}$

5. $E=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\tan x}}{\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}}=0$

6. Ta có: $0\le\frac{\left|3\sin x+2\cos x\right|}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to 0$ khi $x\to+\infty$

Vậy $F=0$.

7. Ta có: $H=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt[m]{\cos ax}-1}{x^2}+\frac{1-\sqrt[n]{\cos bx}}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}=\frac{b}{2n}-\frac{a}{2m}$

8. Ta có: $1-\sqrt[n]{\cos ax}=\frac{1-\cos ax}{1+\sqrt[n]{\cos ax}+(\sqrt[n]{\cos ax})^2+...+(\sqrt[n]{\cos ax})^{n-1}}$

$$\Rightarrow M=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt[n]{\cos ax}+(\sqrt[n]{\cos ax})^2+...+(\sqrt[n]{\cos ax})^{n-1}}=\frac{a}{2}.\frac{1}{n}=\frac{a}{2n}.$$

Bài 6.

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{11x}{2}\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{7}{11}$

2. Ta có $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 2x}{\sin 3x\left(1+\sqrt[3]{1+2\sin 2x}+\sqrt[3]{(1+2\sin 2x)^2}\right)}=-\dfrac{4}{9}$

3. Ta có: $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin^2 2x}{x^2}}{\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x^2}+\frac{1-\sqrt[4]{\cos x}}{x^2}}=-96$

4. Ta có: $D=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^4.\left(\dfrac{3x}{\sin 3x}\right)^4.\dfrac{16}{81}=\dfrac{16}{81}$

5. Ta có: $E=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\tan x}}{\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}}$

Mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x}=1$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos x)\right]}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi\sin^2\frac{x}{2}}{2}\right)}{\tan x}$$

$$=\frac{\pi}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi\sin^2\frac{x}{2}}{2}\right)}{\frac{\pi\sin^2\frac{x}{2}}{2}}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}.x.\frac{x}{\tan x}=0$$

Do đó: $E=0$.

6. Ta có: $0\le\dfrac{|3\sin x+2\cos x|}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to 0$ khi $x\to+\infty$

Vậy $F=0$.

7. Ta có: $H=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sqrt[m]{\cos ax}-1}{x^2}+\frac{1-\sqrt[n]{\cos bx}}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}=\dfrac{b}{2n}-\dfrac{a}{2m}$

8. Ta có: $M=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt{2x+1}}{x^2}}{\frac{1-\cos 2x}{x^2}}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{2}=-\dfrac{1}{4}$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+7x+11\right)=3.2^2+7.2+11=37\longrightarrow$ **Chọn A.**

Câu 2. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|x^2-4\right|=\left|\left(\sqrt{3}\right)^2-4\right|=1\longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 3. Ta có $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{2}=0.\sin\frac{1}{2}=0\longrightarrow$ **Chọn D.**

Câu 4. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-3}{x^3+2}=\frac{\left(-1\right)^2-3}{\left(-1\right)^3+2}=-2\longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-x^3}{\left(2x-1\right)\left(x^4-3\right)}=\frac{1-1^3}{\left(2.1-1\right)\left(1^4-3\right)}=0\longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 6. Ta có $\lim\limits_{x\to -1}\frac{|x-1|}{x^4+x-3}=\frac{|-1-1|}{1-1-3}=-\frac{2}{3}\longrightarrow$ **Chọn D.**

Câu 7. Ta có $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}=\frac{\sqrt{3+1}+1}{-1-1}=-\frac{3}{2}\longrightarrow$ **Chọn A.**

Câu 8. $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\frac{9x^2-x}{\left(2x-1\right)\left(x^4-3\right)}}=\sqrt{\frac{9.3^2-3}{\left(2.3-1\right)\left(3^4-3\right)}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 9. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{x^2+2x}}=\sqrt{\frac{2^2-2+1}{2^2+2.2}}=\frac{1}{2}\longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 10. Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}=\frac{\sqrt[3]{12-4}-\sqrt{6-2}}{3}=\frac{0}{3}=0\longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 11. Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x-15\right)=-13<0\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\left(x-2\right)=0\ \&\ x-2>0,\forall x>2\end{cases}\longrightarrow\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x-15}{x-2}=-\infty.$ **Chọn A.**

Câu 12. $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x+2}=2>0\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0\ \&\ \sqrt{x-2}>0,\forall x>2\end{cases}\longrightarrow\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}=+\infty.$ **Chọn B.**

Câu 13. Ta có $\left|x+2\right|=x+2$ với mọi $x>-2,$ do đó :

$$\lim\limits_{x\to(-2)^+}\frac{|3x+6|}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\frac{3|x+2|}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\frac{3\left(x+2\right)}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}3=3\longrightarrow \textbf{Chọn B.}$$

Câu 14. Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{2-x}{\left(2-x\right)\left(1-2x\right)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{1-2x}=-\frac{1}{3}.$ **Chọn C.**

Câu 15. Ta có $x+3>0$ với mọi $x>-3,$ nên:

$$\lim\limits_{x\to -3^+}\frac{x^2+13x+30}{\sqrt{\left(x+3\right)\left(x^2+5\right)}}=\lim\limits_{x\to -3^+}\frac{\left(x+3\right)\left(x+10\right)}{\sqrt{\left(x+3\right)\left(x^2+5\right)}}=\lim\limits_{x\to -3^+}\frac{\sqrt{x+3}.\left(x+10\right)}{\sqrt{x^2+5}}=\frac{\sqrt{-3+3}\left(-3+7\right)}{\sqrt{\left(-3\right)^2+5}}=0.$$

Chọn C.

Câu 16. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{3x^2+1}=\sqrt{3.1^2+1}=2 \longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 17. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{1-x}=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+1\right)=2\\ \lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)=0 \ \&\ 1-x>0\ (\forall x<1)\end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 18. Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2-3\right)=1\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-1)=1\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=1.$

Chọn C.

Câu 19. Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(ax-1)=2a-1\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{x-2}+3\right)=3\end{cases}.$

Khi đó $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ tồn tại $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow 2a-1=3 \Leftrightarrow a=2.$ **Chọn B.**

Câu 20. Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(x^2-2x+3\right)=6\\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(3-2x^2\right)=-15\end{cases} \longrightarrow \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

$\longrightarrow$ không tồn tại giới hạn khi $x\to 3.$

Vậy chỉ có khẳng định C sai. **Chọn C.**

Câu 21. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x-x^3+1\right)=\lim\limits_{x\to -\infty} x^3\left(\dfrac{1}{x^2}-1+\dfrac{1}{x^3}\right)=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -\infty} x^3=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}-1+\dfrac{1}{x^3}\right)=-1<0\end{cases}$. **Chọn D.**

Giải nhanh: $x-x^3+1\sim(-1)x^3 \longrightarrow +\infty$ khi $x\to -\infty.$

Câu 22. Ta có

$$\lim_{x\to -\infty}\left(|x|^3+2x^2+3|x|\right)=\lim_{x\to -\infty}\left(-x^3+2x^2-3x\right)=\lim_{x\to -\infty} x^3\left(-1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)=+\infty.$$ **Chọn B.**

Giải nhanh: $|x|^3+2x^2+3|x|\sim|x|^3\to +\infty$ khi $x\to -\infty.$

Câu 23. Giải nhanh: $x\to +\infty: \sqrt{x^2+1}+x\sim\sqrt{x^2}+x=2x\to +\infty$. **Chọn B.**

Đặt x làm nhân tử chung:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1=2>0\end{cases}.$$

Câu 23. Giải nhanh: $x\to +\infty: \sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\sim\sqrt[3]{3x^3}+\sqrt{x^2}=\left(\sqrt[3]{3}+1\right)x\to +\infty.$ **Chọn B.**

Đặt x làm nhân tử chung:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{3-\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{3-\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)=\sqrt[3]{3}+1>0\end{cases}.$$

Câu 25. Giải nhanh: $x\to+\infty: x\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)\sim x\left(\sqrt{4x^2}+2x\right)=4x^2\to+\infty.$

Chọn D.

Đặt x^2 làm nhân tử chung:

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2\right)=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2\right)=4>0\end{cases}.$$

Câu 26. Ta có $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{12}{4}=3$

Chọn C.

Câu 27. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^5+1}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x^2-x+1}=\frac{5}{3}.$

Chọn D.

Câu 28. Ta có $\lim\limits_{x\to-\sqrt3}\frac{2x^3+3\sqrt3}{3-x^2}=\lim\limits_{x\to-\sqrt3}\frac{2\left(x+\sqrt3\right)\left(x^2-\sqrt3x+3\right)}{\left(\sqrt3-x\right)\left(\sqrt3+x\right)}=\lim\limits_{x\to-\sqrt3}\frac{2\left(x^2-\sqrt3x+3\right)}{\sqrt3-x}$

$=\frac{2\left[\left(-\sqrt3\right)^2-\sqrt3.\left(-\sqrt3\right)+3\right]}{\sqrt3-\left(-\sqrt3\right)}=\frac{18}{2\sqrt3}=3\sqrt3\longrightarrow\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2=10$. **Chọn A.**

Câu 29. $\lim\limits_{x\to-3}\left|\frac{-x^2-x+6}{x^2+3x}\right|=\lim\limits_{x\to-3}\left|\frac{(x+3)(x-2)}{x(x+3)}\right|=\lim\limits_{x\to-3}\left|\frac{x-2}{x}\right|=\left|\frac{-3-2}{-3}\right|=\frac{5}{3}.$ **Chọn C.**

Câu 30. Ta có $3-x>0$ với mọi $x<3,$ do đó:

$\lim\limits_{x\to3^-}\frac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}=\lim\limits_{x\to3^-}\frac{3-x}{\sqrt{(3-x)\left(9+3x+x^2\right)}}$

$=\lim\limits_{x\to3^-}\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{9+3x+x^2}}=\frac{\sqrt{3-3}}{\sqrt{9+3.3+3^2}}=0.$ **Chọn B.**

Câu 31. Ta có

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(x^2+\pi^{21}\right)\sqrt[7]{1-2x}-\pi^{21}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(x^2+\pi^{21}\right)\left(\sqrt[7]{1-2x}-1\right)}{x}+\lim_{x\to0}x=-\frac{2\pi^{21}}{7}.$$ **Chọn A.**

Câu 32. Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(x^2+x\right)-x}{x^2\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}=+\infty$

vì $1>0$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}\right)=0$ và $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}>0$ với mọi $x>0$. **Chọn D.**

Câu 33. Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}+2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)}{(4x+4-8)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}+2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)}{4\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=\dfrac{12}{12}=1$. **Chọn C.**

Câu 34. Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\sqrt{1+x}-2}{x}+\dfrac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+1}+\dfrac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}}\right)=1+\dfrac{1}{12}=\dfrac{13}{12}$. **Chọn B.**

Câu 35. Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-1}{x}+\dfrac{1-\sqrt{1-bx}}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{ax}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}+\dfrac{bx}{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}+\dfrac{b}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)}\right)=\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}=2.$

Vậy ta được: $\begin{cases}a+b=5\\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=5\\ 2a+3b=12\end{cases}\Leftrightarrow a=3,\ b=2\longrightarrow$ **Chọn A.**

Câu 36. Ta có $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=2$. **Chọn D.**

Giải nhanh : khi $x\to -\infty$ thì : $\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}\sim\dfrac{2x^2}{x^2}=2.$

Câu 37. Ta có: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}=\lim\limits_{x\to -\infty}x.\dfrac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^3}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=-\infty$. **Chọn C.**

Giải nhanh : khi $x\to -\infty$ thì : $\dfrac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}\sim\dfrac{2x^3}{x^2}=2x\to -\infty.$

Câu 38. Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{7}{x^4}+\dfrac{11}{x^6}}{3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^6}}=\dfrac{0}{3}=0.$ **Chọn C.**

Giải nhanh : khi $x\to-\infty$ thì : $\dfrac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}\sim\dfrac{2x^3}{3x^6}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{x^3}\to 0.$

Câu 39. Khi $x\to-\infty$ thì $\sqrt{x^2}=-x\longrightarrow\sqrt{x^2+1}-x\sim\sqrt{x^2}-x=-x-x=-2x\neq 0$

$\longrightarrow$ chia cả tử và mẫu cho x, ta được $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1}=-1$.

Chọn D.

Câu 40. Khi $x\to+\infty$ thì $\sqrt{x^2}=x\longrightarrow\sqrt{x^2+1}-x\sim\sqrt{x^2}-x=x-x=0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((2-a)x-3\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(2-a-\dfrac{3}{x}\right)\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right).$

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)=4>0\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=+\infty$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-a-\dfrac{3}{x}\right)=2-a>0\Rightarrow a<2$.

Giải nhanh : ta có $x\to+\infty\longrightarrow\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$

$=\left((2-a)x-3\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\sim(2-a)x.\left(\sqrt{x^2}+x\right)=2(2-a)x\to+\infty\Leftrightarrow a<2$.

Khi đó $P=a^2-2a+4=(a-1)^2+3\geq 3,\ P=3\Leftrightarrow a=1<2\Rightarrow P_{\min}=3.$ **Chọn B.**

Câu 41. Giải nhanh: khi $x\to-\infty\longrightarrow\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}\sim\dfrac{\sqrt{4x^2}}{x}=\dfrac{-2x}{x}=-2.$ **Chọn C.**

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{-\sqrt{4}}{1}=-2.$

Câu 42. Giải nhanh : khi

$$x\to+\infty\longrightarrow\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}\sim\dfrac{\sqrt{4x^2}-x}{\sqrt{9x^2}+2x}=\dfrac{2x-x}{3x+2x}=\dfrac{1}{5}.\ \textbf{Chọn D.}$$

Cụ thể : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{x}-1}{\sqrt{9-\frac{3}{x}}+2}=\dfrac{1}{5}.$

Câu 43. Ta phải có $ax^2-3x>0$ trên $(-\infty;\alpha)\Leftrightarrow a\geq 0.$

Ta có $x\to-\infty\longrightarrow\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x\sim\sqrt{4x^2}-x=-3x\neq 0.$

Như vậy xem như "tử" là một đa thức bậc 1. Khi đó $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x}+bx}>0$ khi và chỉ khi $\sqrt{ax^2-3x}+bx$ là đa thức bậc 1.

Ta có $\sqrt{ax^2-3x}+bx\sim\sqrt{ax^2}+bx=\left(-\sqrt{a}+b\right)x\longrightarrow-\sqrt{a}+b\neq 0.$

Khi đó $\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x}+bx}\sim\dfrac{-3x}{\left(-\sqrt{a}+b\right)x}=\dfrac{3}{b-\sqrt{a}}=L>0\Leftrightarrow b-\sqrt{a}>0\Rightarrow b>\sqrt{a}.$

Chọn B.

Câu 44. Giải nhanh: $x\to-\infty\longrightarrow\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}\sim\dfrac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt{2x^2}}=\dfrac{x}{-\sqrt{2}x}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$ **Chọn C.**

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}}{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Câu 45. Giải nhanh: $x\to-\infty\longrightarrow\sqrt{2x^2+1}+ax\sim\sqrt{2x^2}+x$

$=-\sqrt{2}x+ax=\left(a-\sqrt{2}\right)x\to+\infty\Leftrightarrow a-\sqrt{2}<0\Leftrightarrow a<\sqrt{2}.$ **Chọn B.**

Cụ thể: vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+ax\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+a\right)=+\infty$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+a\right)=a-\sqrt{2}<0\Leftrightarrow a<\sqrt{2}.$

Câu 46. Giải nhanh : $x\to-\infty\longrightarrow 2x^3-x^2\sim 2x^3\to-\infty.$ **Chọn D.**

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-x^2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(2-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2>0\end{cases}.$

Câu 47. Ta có $\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{x+2-1}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{x+1}{x^2-4}\right)=-\infty$

Vì $\lim\limits_{x\to2^-}(x+1)=3>0;\ \lim\limits_{x\to2^-}\left(x^2-4\right)=0$ và $x^2-4<0$ với mọi $x\in(-2;2).$ **Chọn A.**

Câu 48. Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a+ax+ax^2-b}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a+ax+ax^2-b}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)$ hữu hạn $\Leftrightarrow 1+a.1+a.1^2-b=0\Leftrightarrow 2a-b=-1$.

Vậy ta có $\begin{cases}a+b=4\\2a-b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}\Rightarrow L=-\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)$

$=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x+2)}{1+x+x^2}=1$. **Chọn C.**

Câu 49. Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+2x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+2}-1\right)=+\infty$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+2}-1\right)=\sqrt{2}-1>0$. **Chọn B.**

Giải nhanh : $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{1+2x^2}-x\sim\sqrt{2x^2}-x=\sqrt{2}x-x=\left(\sqrt{2}-1\right)x\to+\infty$.

Câu 50. $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{x^2+1}-x\sim\sqrt{x^2}-x=x-x=0\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp.

Giải nhanh: $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\sim\dfrac{1}{\sqrt{x^2}+x}=\dfrac{1}{2x}\to 0$. **Chọn A.**

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\dfrac{0}{2}=0$.

Câu 51. $x\to-\infty\longrightarrow\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\sim\sqrt{5x^2}+x\sqrt{5}=-\sqrt{5}x+x\sqrt{5}=0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $x\to-\infty\longrightarrow\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}$

$=\dfrac{2x}{\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}}\sim\dfrac{2x}{\sqrt{5x^2}-x\sqrt{5}}=\dfrac{2x}{-2\sqrt{5}x}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Cụ thể: Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{-\sqrt{5+\frac{2}{x}}+\sqrt{5}}=\dfrac{2}{-2\sqrt{5}}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{1}{5}\sqrt{5}\longrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{5}\Rightarrow S=-1.\\b=0\end{cases}$ **Chọn A.**

Câu 52. Khi $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\sim\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2}=0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $x \to +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}$

$$= \frac{-x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+4x}} \sim \frac{-x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}} = \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$ **Chọn B.**

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+4x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}}} = -\frac{1}{2}.$$

Câu 53. Giải nhanh:

$$x \to -\infty \longrightarrow \sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2} \sim \sqrt[3]{3x^3}+\sqrt{x^2} = \left(\sqrt[3]{3}-1\right)x \to -\infty.$$ **Chọn D.**

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt[3]{3-\frac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right) = -\infty$

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty,\quad \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3-\frac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right) = \sqrt[3]{3}-1>0.$

Câu 54. Khi $x \to +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x^2} \sim \sqrt{x^2}--\sqrt[3]{x^3} = x-x=0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x^2} = \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)+\left(x-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}+\frac{x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}} \sim \frac{x}{\sqrt{x^2}+x}+\frac{x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[6]{x^6}}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6}\ (x \to +\infty).$$ **Chọn A.**

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x+x-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}+\frac{x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Câu 55. $x \to +\infty \longrightarrow \sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1} \sim \sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{2x} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1} =$

$$\frac{-2}{\sqrt[3]{\left(2x-1\right)^2}+\sqrt[3]{4x^2-1}-\sqrt[3]{\left(2x+1\right)^2}} \sim \frac{-2}{\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt[3]{4x^2}} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{4x^2}} \to 0.$$ **Chọn A.**

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}}=0.$

Câu 56. Ta có $\lim\limits_{x\to0}\left[x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to0}(x-1)=0-1=-1.$ **Chọn B.**

Câu 57. Ta có $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}.\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{0.\sqrt{2}}{2}=0$. **Chọn C.**

Câu 58. Giải nhanh:

$$x\to+\infty\longrightarrow x\sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}\sim x.\sqrt{\frac{2x}{3x^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.x.\frac{1}{\sqrt{x^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.x.\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$ **Chọn B.**

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2(2x+1)}{3x^3+x^2+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}.$

Câu 59. Ta có $\lim\limits_{x\to0}x^2\left(\sin\pi x-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\sin\pi x-1\right)=-1.$ **Chọn B.**

Câu 60. Với $x\in(-1;0)$ thì $x+1>0$ và $\dfrac{x}{x-1}>0$.

Do đó $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(x^3+1\right)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)\left(x^2-x+1\right)\sqrt{\dfrac{x}{(x-1)(x+1)}}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\sqrt{x+1}\left(x^2-x+1\right)\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}=0$. **Chọn C.**

3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I – HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa 1

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0\in K$.

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

II – HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

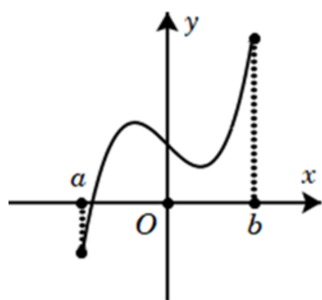
Định nghĩa 2

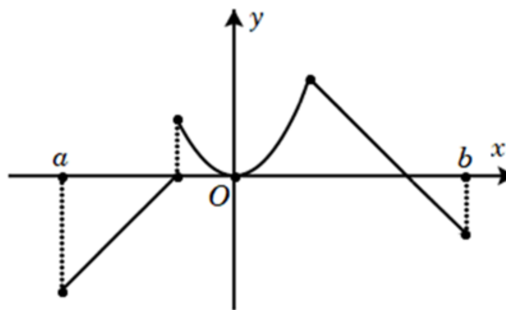
Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a),\quad \lim_{x\to b^-} f(x)=f(b).$$

Nhận xét: Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một " đường liền " trên khoảng đó.





Hàm số liên tục trên khoảng $(a;b)$ Hàm số không liên tục trên khoảng $(a;b)$

III – MỘT SỐ ĐỊNH LÍ CƠ BẢN

Định lí 1

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.

b) Hàm số phân thức hữu tỉ và hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

Định lí 2

Giả sử $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

a) Các hàm số $y=f(x)+g(x)$, $y=f(x)-g(x)$ và $y=f(x).g(x)$ liên tục tại x_0;

b) Hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0)\neq 0$

Định lí 3

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.

Định lí 3 có thể phát biểu theo một dạng khác như sau:

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$, thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a;b)$.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Vấn đề 1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Phương pháp:

- Tìm giới hạn của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to x_0$ và tính $f(x_0)$
- Nếu tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ thì ta so sánh $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ với $f(x_0)$.

Chú ý

1. Nếu hàm số liên tục tại x_0 thì trước hết hàm số phải xác định tại điểm đó

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l$.

3. Hàm số $y=\begin{cases} f(x) & \text{khi } x\neq x_0 \\ k & \text{khi } x=x_0 \end{cases}$ liên tục tại $x=x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=k$.

4. Hàm số $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x\geq x_0 \\ f_2(x) & \text{khi } x<x_0 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x=x_0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^+} f_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f_2(x)=f_1(x_0)$.

Chú ý

- Hàm số $y=\begin{cases} f(x) & \text{khi } x\ne x_0 \\ k & \text{khi } x=x_0 \end{cases}$ liên tục tại $x=x_0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=k$.
- Hàm số $y=\begin{cases} f(x) & \text{khi } x> x_0 \\ g(x) & \text{khi } x\le x_0 \end{cases}$ liên tục tại $x=x_0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)$.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số sau tại $x=3$

1. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-27}{x^2-x-6} & \text{khi } x\ne 3 \\ \dfrac{10}{3} & \text{khi } x=3 \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-3}{\sqrt{2x+3}-3} & \text{khi } x<3 \\ (x-1)^2 & \text{khi } x\ge 3 \end{cases}$

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm chỉ ra

1. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{khi } x\ne 1 \\ 2 & \text{khi } x=1 \end{cases}$ tại điểm $x_0=1$

2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x^2-x-2|}{x+1} & \text{khi } x\ne -1 \\ 1 & \text{khi } x=-1 \end{cases}$

Ví dụ 3 Tìm a để hàm số sau liên tục tại $x=2$

1. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2} & \text{khi } x\ne 2 \\ a & \text{khi } x=2 \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8} & \text{khi } x<2 \\ ax^2+x+1 & \text{khi } x\ge 2 \end{cases}$

11. BÀI TẬP TỰ LUẬN TỰ LUYỆN

Bài 1 Xét tính liên tục của hàm số $y=f(x)$ tại điểm chỉ ra

1. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} & \text{khi } x\ne 4 \\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=4 \end{cases}$ tại $x=4$

2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-1}}+2 & \text{khi } x>1 \\ 3x^2+x-1 & \text{khi } x\le 1 \end{cases}$ tại $x=1$

3. $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } |x|\le 1 \\ |x-1| & \text{khi } |x|>1 \end{cases}$ tại $x=1$ và $x=-1$.

Bài 2. Chọn giá trị $f(0)$ để các hàm số sau liên tục tại điểm $x=0$.

1. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x(x+1)}$

2. $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{2x+8}-2}{\sqrt{3x+4}-2}$

Bài 3. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm đã chỉ ra

1. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{x+2}}{x+1} & \text{khi } x>-1 \\ 2x+3 & \text{khi } x\le -1 \end{cases}$ tại $x_0=-1$

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1+\sqrt[3]{x-1}}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 2 & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x_0=0$

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ \dfrac{1}{3} & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại $x_0=1$

4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}}+2x & \text{khi } x>2\\ x^2-x+3 & \text{khi } x\leq 2\end{cases}$ tại $x_0=2$

Bài 4. Tìm a để các hàm số sau liên tục tại các điểm đã chỉ ra

1. $f(x)=\begin{cases}x+2a & \text{khi } x<0\\ x^2+x+1 & \text{khi } x\geq 0\end{cases}$ tại $x=0$

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2+(2a+1)x} & \text{khi } x\neq 0\\ 3 & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x=0$

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1} & \text{khi } x>1\\ \dfrac{a(x^2-2)}{x-3} & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$ tại $x=1$.

Vấn đề 2. Xét tính liên tục của hàm số trên một tập

Phương pháp: Sử dụng các định lí về tính liên tục của hàm đa thức, lương giác, phân thức hữu tỉ …
Nếu hàm số cho dưới dạng nhiều công thức thì ta xét tính liên tục trên mỗi khoảng đã chia và tại các điểm chia của các khoảng đó.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1 Xét tính liên tục của các hàm số sau trên toàn trục số:

1. $f(x)=\tan 2x+\cos x$

2. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}+2}{x^2-3x+2}$

Ví dụ 2 Xác định a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a^2(x-2)}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x<2\\ (1-a)x & \text{khi } x\geq 2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

1I. BÀI TẬP TỰ LUẬN TỰ LUYỆN

Bài 1 Xác định tính liên tục của hàm số sau trên $\mathbb{R}$

1. $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$

2. $f(x)=\sqrt{3x^2-1}$

3. $f(x)=2\sin x+3\tan 2x$

Bài 2 Xét tính liên tục của các hàm số sau trên $\mathbb{R}$

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^3-16} & \text{khi } x<2\\ 2-x & \text{khi } x\geq 2\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x>1\\ \dfrac{\sqrt[3]{1-x}+2}{x+2} & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$

Bài 3 Xét tính liên tục hàm số sau trên $\mathbb{R}$

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ **2.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{khi } x\le 0\\ (x-1)^3 & \text{khi } 0<x<2\\ \sqrt{x}-1 & \text{khi } x\ge 2\end{cases}$ **4.** $f(x)=\begin{cases}2x^2+x+1 & \text{khi } |x|\le 1\\ 3x-1 & \text{khi } |x|>1\end{cases}$.

Bài 4. Xác định a,b để các hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$

1. $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{khi } |x|\le\dfrac{\pi}{2}\\ ax+b & \text{khi } |x|>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ **2.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x(x-2)} & \text{khi } x(x-2)\neq 0\\ a & \text{khi } x=2\\ b & \text{khi } x=0\end{cases}$.

Bài 5. Tìm m để các hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3m-2 & \text{khi } x=1\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x>0\\ 2x^2+3m+1 & \text{khi } x\le 0\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x\ge 2\\ \dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x<2\end{cases}$.

Vấn đề 3. Chứng minh phương trình có nghiệm

Phương pháp :

- Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và có hai số $a,b\in D$ sao cho $f(a).f(b)<0$.
- Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có k nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng rời nhau $(a_i;a_{i+1})$ (i=1,2,…,k) nằm trong D sao cho $f(a_i).f(a_{i+1})<0$.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1 Chứng minh rằng các phương trình sau có đúng một nghiệm.

1. $x^5+3x+1=0$ **2.** $x^3+2x=4+3\sqrt{3-2x}$

Ví dụ 2 Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất một nghiệm :

1. $x^7+3x^5-1=0$ **2.** $x^2\sin x+x\cos x+1=0$

Ví dụ 3. $\sqrt{x^5+2x^3+15x^2+14x+2}=3x^2+x+1$ có đúng 5 nghiệm phân biệt

1I. BÀI TẬP TỰ LUẬN TỰ LUYỆN

Bài 1 Chứng minh rằng phương trình sau có đúng ba nghiệm phân biệt

1. $x^3-3x+1=0$ **2.** $2x+6\sqrt[3]{1-x}=3$

Bài 2 Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của m, n

1. $m(x-1)^3(x+2)+2x+3=0$ **2.** $\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{\sin x}=m$

3. $m(x-a)(x-c)+n(x-b)(x-d)=0$ **(**$a\le b\le c\le d$**).**

Bài 3 Cho $m>0$ và a,b,c là ba số thực bất kỳ thoả mãn

$\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

Bài 4. Chứng minh rằng phương trình :

1. $x^4+x^3-3x^2+x+1=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$

2. $x^5-5x^3+4x-1=0$ có năm nghiệm thuộc khoảng $(-2;3)$

3. $a(x-b)(x-c)+b(x-c)(x-a)+c(x-a)(x-b)=0$; $a,b,c>0$ có hai nghiệm phân biệt.

4. $(1-m^2)x^5-3x-1=0$ luôn có nghiệm với mọi m

5. $m^2.(x-2)+m(x-1)^3.(x-2)^4+3x-4=0$ có nghiệm với mọi m.

Bài 5 . Cho các số thực dương m,n,p thỏa mãn: $n<m;\ mp<n^2$ và $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}=0$. Chứng minh rằng phương trình :

$f(x)=ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

Bài 6.

1. Cho hàm số $f:[0;1]\to[0;1]$ liên tục.Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một số thực $c\in[0;1]$ sao cho $f(c)=c$.

2. Cho hàm số $f:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ liên tục và $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=L<1$ Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một số $c\geq 0$ sao cho $f(c)=c$.

3. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục tại $x=0$ thỏa: $f(3x)=f(x)$.

4. Cho hàm số $f:[0;1]\to[0;1]$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa $f(0)=f(1)$.

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì phương trình $f(x)-f(x+\frac{1}{n})=0$ luôn có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$.

Bài 7.

1. Cho hàm số f liên tục trên đoạn [a ;b] và n điểm $x_1;x_2;...;x_n\in[a;b]$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm $c\in[a;b]$ sao cho $nf(c)=f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)$.

2. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất các số $0<\alpha<\beta<1$ sao cho $\cos\alpha=\alpha^2$ và $\beta\tan\beta=1$.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Vấn đề 1. XÉT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Hàm số $f(x)=\sqrt{3-x}+\frac{1}{\sqrt{x+4}}$ liên tục trên:

A. $[-4;3]$. **B.** $[-4;3)$.

C. $(-4;3]$. **D.** $[-\infty;-4]\cup[3;+\infty)$.

Câu 2. Hàm số $f(x)=\frac{x^3+x\cos x+\sin x}{2\sin x+3}$ liên tục trên:

A. $[-1;1]$. **B.** $[1;5]$. **C.** $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ với $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ với mọi $x\neq 1$. Tính $f(1)$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[-3;3]$ với $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}{x}$ với $x\neq 0$. Tính $f(0)$.

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $(-4;+\infty)$ với $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$ với $x\neq 0$. Tính $f(0)$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Vấn đề 2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Câu 6. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ m & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Câu 7. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $m=0$. **B.** $m=2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=6$.

Câu 8. Tìm giá trị thực của tham số k để hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ k+1 & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $k=\dfrac{1}{2}$. **B.** $k=2$. **C.** $k=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $k=0$.

Câu 9. Biết rằng hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x\neq 3\\ m & \text{khi } x=3\end{cases}$ liên tục tại $x=3$ (với m là tham số). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $m\in(-3;0)$. **B.** $m\leq -3$.

C. $m\in[0;5)$. **D.** $m\in[5;+\infty)$.

Câu 10. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ m & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$.

A. $m\in(-2;-1)$. **B.** $m\leq -2$.

C. $m\in[-1;7)$. **D.** $m\in[7;+\infty)$.

Câu 11. Biết rằng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

C. $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Câu 12. Biết rằng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin \pi x}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $m=-\pi$. **B.** $m=\pi$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=1$.

Câu 13. Biết rằng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\cos x}{(x-\pi)^2} & \text{khi } x\neq \pi\\ m & \text{khi } x=\pi\end{cases}$ liên tục tại $x=\pi$.

A. $m=\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $m=-\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $m=\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 14. Hàm số $f(x)=\begin{cases}3 & \text{khi } x=-1\\ \dfrac{x^4+x}{x^2+x} & \text{khi } x\neq -1,\ x\neq 0\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại:

A. mọi điểm trừ $x=0$, $x=1$. **B.** mọi điểm $x\in\mathbb{R}$.

C. mọi điểm trừ $x=-1$. **D.** mọi điểm trừ $x=0$.

Câu 15. Số điểm gián đoạn của hàm số $f(x)=\begin{cases}0,5 & \text{khi } x=-1\\ \dfrac{x(x+1)}{x^2-1} & \text{khi } x\neq -1,\ x\neq 1\\ 1 & \text{khi } x=1\end{cases}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Vấn đề 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}m^2x^2 & \text{khi } x\leq 2\\ (1-m)x & \text{khi } x>2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 17. Biết rằng hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{khi } x\in[0;4]\\ 1+m & \text{khi } x\in(4;6]\end{cases}$ tục trên $[0;6]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m<2$. **B.** $2\leq m<3$. **C.** $3<m<5$. **D.** $m\geq 5$.

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 19. Biết rằng $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ (với a là tham số). Khẳng định nào dưới đây về giá trị a là đúng?

A. a là một số nguyên. **B.** a là một số vô tỉ.

C. $a>5$. **D.** $a<0$.

Câu 20. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x<1\\ -2x & \text{khi } x\geq 1\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $f(x)$ không liên tục trên $(0;2)$.

C. $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

D. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 21. Tìm giá trị nhỏ nhất của a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x-3}-x} & \text{khi } x>3\\ 1-a^2x & \text{khi } x\leq 3\end{cases}$ liên tục tại $x=3$.

A. $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $-\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Câu 22. Tìm giá trị lớn nhất của a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x>2\\ a^2x+\dfrac{1}{4} & \text{khi } x\leq 2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. $a_{\max}=3$. **B.** $a_{\max}=0$.

C. $a_{\max}=1$. **D.** $a_{\max}=2$.

Câu 23. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}1-\cos x & \text{khi } x\leq 0\\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x>0\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

B. $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;1)$.

C. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

Câu 24. Tìm các khoảng liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } |x|\leq 1\\ x-1 & \text{khi } |x|>1\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

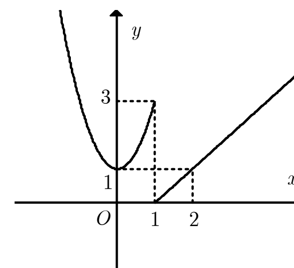
A. Hàm số liên tục tại $x=-1$.

B. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty,-1);(1;+\infty)$.

C. Hàm số liên tục tại $x=1$.

D. Hàm số liên tục trên khoảng $(-1,1)$.

Câu 25. Hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên không liên tục tại điểm có hoành độ là bao nhiêu?



A. $x=0$.

B. $x=1$.

C. $x=2$.

D. $x=3$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x} & \text{khi } x<1,\ x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\\ \sqrt{x} & \text{khi } x\geq 1\end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$. **B.** mọi điểm trừ $x=0$.

C. mọi điểm trừ $x=1$.

D. mọi điểm trừ $x=0$ và $x=1$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x<3,\ x\neq 1\\ 4 & \text{khi } x=1\\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x\geq 3\end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$. **B.** mọi điểm trừ $x=1$.

C. mọi điểm trừ $x=3$.

D. mọi điểm trừ $x=1$ và $x=3$.

Câu 28. Số điểm gián đoạn của hàm số $h(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x<0\\ x^2+1 & \text{khi } 0\le x\le 2\\ 3x-1 & \text{khi } x>2\end{cases}$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 29. Tính tổng S gồm tất cả các giá trị m để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+x & \text{khi } x<1\\ 2 & \text{khi } x=1\\ m^2x+1 & \text{khi } x>1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $S=-1$. **B.** $S=0$. **C.** $S=1$. **D.** $S=2$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-x\cos x & \text{khi } x<0\\ \dfrac{x^2}{1+x} & \text{khi } 0\le x<1\\ x^3 & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $x\in\mathbb{R}$. **B.** mọi điểm trừ $x=0$.

C. mọi điểm trừ $x=1$. **D.** mọi điểm trừ $x=0$; $x=1$.

Vấn đề 5. SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH TRÊN MỘT KHOẢNG

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=-4x^3+4x-1$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trên khoảng $(-\infty;1)$.

C. Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên khoảng $(-2;0)$.

D. Phương trình $f(x)=0$ có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-3;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 32. Cho phương trình $2x^4-5x^2+x+1=0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-1;1)$.

B. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-2;0)$.

C. Phương trình chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2;1)$.

D. Phương trình có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0;2)$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x-1$. Số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ trên $\mathbb{R}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ sao cho $f(-1)=2$, $f(4)=7$. Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình $f(x)=5$ trên đoạn $[-1;4]$:

A. Vô nghiệm. **B.** Có ít nhất một nghiệm.

C. Có đúng một nghiệm. **D.** Có đúng hai nghiệm.

Câu 35. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10;10)$ để phương trình $x^3-3x^2+(2m-2)x+m-3=0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1<-1<x_2<x_3$?

A. 19. **B.** 18. **C.** 4. **D.** 3.

HÀM SỐ LIÊN TỤC

Vấn đề 1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Các ví dụ

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số sau tại $x=3$

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-27}{x^2-x-6} & \text{khi } x\neq 3\\ \dfrac{10}{3} & \text{khi } x=3\end{cases}$ **2.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-3}{\sqrt{2x+3}-3} & \text{khi } x<3\\ (x-1)^2 & \text{khi } x\geq 3\end{cases}$

Lời giải.

1. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có $f(3)=\dfrac{10}{3}$ và $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+2)}$

$$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x+9}{x+2}=\dfrac{27}{5}\neq f(3).$$

Vậy hàm số không liên tục tại $x=3$.

2. Ta có $f(3)=4$ và $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x-1)^2=4$; $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x-3}{\sqrt{2x+3}-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{2x+3}+3}{2}=3\neq\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)$

Vậy hàm số gián đoạn tại $x=3$.

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm chỉ ra

1. $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{khi } x\neq 1\\ 2 & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại điểm $x_0=1$

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-x-2|}{x+1} & \text{khi } x\neq -1\\ 1 & \text{khi } x=-1\end{cases}$

Lời giải.

1. Ta có $f(1)=2$ và $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)=2=f(1)$

Vậy hàm số liên tục tại điểm $x=1$.

2. Ta có $f(-1)=1$

$$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{|(x+1)(x-2)|}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}(2-x)=3$$

$$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{|(x+1)(x-2)|}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}(x-2)=-3\neq\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$$

Suy ra không tồn tại giới hạn của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to -1$.

Vậy hàm số gián đoạn tại $x=-1$.

Ví dụ 3 Tìm a để hàm số sau liên tục tại $x=2$

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ a & \text{khi } x=2\end{cases}$ **2.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8} & \text{khi } x<2\\ ax^2+x+1 & \text{khi } x\geq 2\end{cases}$

Lời giải.

1. Ta có $f(2)=a$ và $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4}{\sqrt[3]{(4x)^2}+2\sqrt[3]{4x}+4}=\dfrac{1}{3}$

Hàm số liên tục tại điểm $x=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{3}$.

2. Ta có : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+2x+4}=1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(ax^2+x+1\right)=4a+3=f(2)$

Hàm số liên tục tại $x=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$

$\Leftrightarrow 4a+3=1\Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Xét tính liên tục của hàm số $y=f(x)$ tại điểm chỉ ra

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} & \text{khi } x\ne 4\\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=4\end{cases}$ tại $x=4$

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-1}}+2 & \text{khi } x>1\\ 3x^2+x-1 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ tại $x=1$

3. $f\left(x\right)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } \left|x\right|\le 1\\ \left|x-1\right| & \text{khi } \left|x\right|>1\end{cases}$ tại $x=1$ và $x=-1$.

Bài 2. Chọn giá trị $f(0)$ để các hàm số sau liên tục tại điểm $x=0$.

1. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x(x+1)}$

2. $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{2x+8}-2}{\sqrt{3x+4}-2}$

Bài 3. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm đã chỉ ra

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\sqrt{x+2}}{x+1} & \text{khi } x>-1\\ 2x+3 & \text{khi } x\le -1\end{cases}$ tại $x_0=-1$

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1+\sqrt[3]{x-1}}{x} & \text{khi } x\ne 0\\ 2 & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x_0=0$

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} & \text{khi } x\ne 1\\ \dfrac{1}{3} & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại $x_0=1$

4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}}+2x & \text{khi } x>2\\ x^2-x+3 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$ tại $x_0=2$

Bài 4. Tìm a để các hàm số sau liên tục tại các điểm đã chỉ ra

1. $f\left(x\right)=\begin{cases}x+2a & \text{khi } x<0\\ x^2+x+1 & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$ tại $x=0$

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2+(2a+1)x} & \text{khi } x\neq 0\\ 3 & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x=0$

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1} & \text{khi } x>1\\ \dfrac{a(x^2-2)}{x-3} & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$ tại $x=1$.

Bài 1

1. Ta có : $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{1}{4}=f(4)$

Hàm số liên tục tại điểm $x=4$.

2. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{x-1}}+2\right]=2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(3x^2+x-1\right)=3\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

Hàm số không liên tục tại $x=1$.

3. Hàm số liên tục tại $x=1$, không liên tục tại điểm $x=-1$.

Bài 2.

1. Ta có : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x(x+1)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}=1$

Vậy ta chọn $f(0)=1$

2. Ta có : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\sqrt{3x+4}+2\right)}{3\left(\sqrt[3]{(2x+8)^2}+2.\sqrt[3]{2x+8}+4\right)}=\dfrac{2}{9}$

Vậy ta chọn $f(0)=\dfrac{2}{9}$.

Bài 3.

1. Ta có: $f(-1)=1$ và $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(2x+3\right)=1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x+\sqrt{x+2}}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2-x-2}{(x+1)(x-\sqrt{x+2})}$

$\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x-2}{x-\sqrt{x+2}}=\dfrac{3}{2}$

Suy ra $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

Vậy hàm số không liên tục tại $x_0=-1$.

2. Ta có: $f(0)=2$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1+\sqrt[3]{x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1+\sqrt[3]{x-1}}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{x-1}+x-1}\right)=2=f(0)$

Vậy hàm số liên tục tại $x=0$.

3. Ta có : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\dfrac{1}{3}=f(1)$

Hàm số liên tục tại điểm $x=1$.

4. Ta có : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x-2}}+2x\right]=4$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2-x+3\right)=5\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

Hàm số không liên tục tại $x_0=2$.

Bài 4.

1. Ta có : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+x+1)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2a)=2a$

Suy ra hàm số liên tục tại $x=0\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$.

2. Ta có : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+1}-1}{x\left(ax+2a+1\right)}$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{\left(ax+2a+1\right)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}=\frac{2}{2a+1}$$

Hàm số liên tục tại $x=0\Leftrightarrow \frac{2}{2a+1}=3\Leftrightarrow a=-\frac{1}{6}$.

3. Ta có : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1}=\frac{3}{8}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{a(x^2-2)}{x-3}=\frac{a}{2}$

Suy ra hàm số liên tục tại $x=1\Leftrightarrow \frac{a}{2}=\frac{3}{8}\Rightarrow a=\frac{3}{4}$.

Vấn đề 2. Xét tính liên tục của hàm số trên một tập

Phương pháp: Sử dụng các định lí về tính liên tục của hàm đa thức, lương giác, phân thức hữu tỉ …
Nếu hàm số cho dưới dạng nhiều công thức thì ta xét tính liên tục trên mỗi khoảng đã chia và tại các điểm chia của các khoảng đó.

Các ví dụ

Ví dụ 1 Xét tính liên tục của các hàm số sau trên toàn trục số:

1. $f(x)=\tan 2x+\cos x$ **2.** $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}+2}{x^2-3x+2}$

Lời giải.

1. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$

Vậy hàm số liên tục trên D

2. Điều kiện xác định: $\begin{cases}x-1\geq 0\\ x^2-3x+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ x\neq 2\end{cases}$

Vậy hàm số liên tục trên $\left(1;2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$.

Ví dụ 2 Xác định a để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{a^2\left(x-2\right)}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x<2\\ \left(1-a\right)x & \text{khi } x\geq 2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Với $x<2\Rightarrow$ hàm số liên tục

Với $x>2\Rightarrow$ hàm số liên tục

Với $x=2$ ta có $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(1-a)x=2(1-a)=f(2)$

$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{a^2(x-2)}{\sqrt{x+2}-2}=\lim\limits_{x\to2^-}a^2(\sqrt{x+2}+2)=4a^2$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow$ hàm số liên tục tại $x=2$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)\Leftrightarrow4a^2=2(1-a)\Leftrightarrow a=-1,a=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $a=-1,a=\dfrac{1}{2}$ là những giá trị cần tìm.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Xác định tính liên tục của hàm số sau trên $\mathbb{R}$

1. $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$ **2.** $f(x)=\sqrt{3x^2-1}$ **3.** $f(x)=2\sin x+3\tan 2x$

Bài 2 Xét tính liên tục của các hàm số sau trên $\mathbb{R}$

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^3-16} & \text{khi } x<2\\ 2-x & \text{khi } x\ge2\end{cases}$ **2.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x>1\\ \dfrac{\sqrt[3]{1-x}+2}{x+2} & \text{khi } x\le1\end{cases}$

Bài 3 Xét tính liên tục hàm số sau trên $\mathbb{R}$

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|} & \text{khi } x\ne1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ **2.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x} & \text{khi } x\ne0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{khi } x\le0\\ (x-1)^3 & \text{khi } 0<x<2\\ \sqrt{x}-1 & \text{khi } x\ge2\end{cases}$ **4.** $f(x)=\begin{cases}2x^2+x+1 & \text{khi } |x|\le1\\ 3x-1 & \text{khi } |x|>1\end{cases}$.

Bài 4. Xác định a,b để các hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$

1. $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{khi } |x|\le\dfrac{\pi}{2}\\ ax+b & \text{khi } |x|>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ **2.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x(x-2)} & \text{khi } x(x-2)\ne0\\ a & \text{khi } x=2\\ b & \text{khi } x=0\end{cases}$.

Bài 5. Tìm m để các hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1} & \text{khi } x\ne1\\ 3m-2 & \text{khi } x=1\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x>0\\ 2x^2+3m+1 & \text{khi } x\le0\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x\ge2\\ \dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x<2\end{cases}$.

Bài 1

1. TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{3;-2\}$

Ta có hàm số liên tục tại mọi $x \in D$ và hàm số gián đoạn tại $x = -2, x = 3$

2. TXĐ : $D = \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$

Ta có hàm số liên tục tại mọi điểm $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$

$\lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^-} f(x) = 0 = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow$ hàm số liên tục trái tại $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^+} f(x) = 0 = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow$ hàm số liên tục phải tại $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Hàm số gián đoạn tại mọi điểm $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3. TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Ta có hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc D và gián đoạn tại các điểm

$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 2

1. TXĐ : $D = \mathbb{R}$

- Với $x < 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 16} \Rightarrow$ hàm số liên tục
- Với $x > 2 \Rightarrow f(x) = 2 - x \Rightarrow$ hàm số liên tục
- Tại $x = 2$ ta có : $f(2) = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2 - x) = 0$;

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(x-3)}{2(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = -\frac{1}{24} \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

Hàm số không liên tục tại $x = 2$.

2. Hàm số xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$

- Với $x < 1 \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{1-x} + 2}{x + 2} \Rightarrow$ hàm số liên tục
- Với $x > 1 \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \Rightarrow$ hàm số liên tục
- Tại $x = 1$ ta có : $f(1) = \frac{2}{3}$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x} + 1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{2}{3}$;

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{1-x} + 2}{x + 2} = \frac{2}{3} = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$

Hàm số liên tục tại $x = 1$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 3.

1. Hàm số liên tục tại mọi điểm $x \neq 1$ và gián đoạn tại $x = 1$

2. Hàm số liên tục tại mọi điểm $x \neq 0$ và gián đoạn tại $x = 0$

3. Hàm số liên tục tại mọi điểm $x \neq 2$ và gián đoạn tại $x = 2$

4. Hàm số liên tục tại mọi điểm $x \neq \pm 1$ và gián đoạn tại $x = \pm 1$.

Bài 4.

1. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2}a + b = 1 \\ -\frac{\pi}{2}a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{\pi} \\ b = 0 \end{cases}$

2. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$.

Bài 5.

1. Với $x \neq 1$ ta có $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-2} + 2x - 1}{x-1}$ nên hàm số liên tục trên khoảng $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Do đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x = 1$

Ta có: $f(1) = 3m - 2$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x-2} + 2x - 1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[1 + \frac{x^3 + x - 2}{(x-1)\left(x^2 - x\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{(x-2)^2}\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[1 + \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - x\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{(x-2)^2}}\right] = 2$$

Nên hàm số liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow 3m - 2 = 2 \Leftrightarrow m = \frac{4}{3}$

Vậy $m = \frac{4}{3}$ là những giá trị cần tìm.

2. • Với $x > 0$ ta có $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ nên hàm số liên tục trên $(0; +\infty)$

• Với $x < 0$ ta có $f(x) = 2x^2 + 3m + 1$ nên hàm số liên tục trên $(-\infty; 0)$.

Do đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x = 0$

Ta có: $f(0) = 3m + 1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(2x^2 + 3m + 1\right) = 3m + 1$$

Do đó hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow 3m + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}$

Vậy $m = -\frac{1}{6}$ thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

3. Với $x > 2$ ta có hàm số liên tục.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục trên khoảng $(-\infty; 2)$ và liên tục tại $x = 2$.

• Hàm số liên tục trên $(-\infty; 2)$ khi và chỉ khi tam thức

$g(x) = x^2 - 2mx + 3m + 2 \neq 0, \ \forall x \leq 2$

TH 1: $\begin{cases} \Delta' = m^2 - 3m - 2 \leq 0 \\ g(2) = -m + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \leq m \leq \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$

TH 2: $\begin{cases} \Delta' = m^2 - 3m - 2 > 0 \\ x_1 = m - \sqrt{\Delta'} > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 2 > 0 \\ m > 2 \\ \Delta' < (m-2)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \\ m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} < m < 6$

Nên $\dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \le m < 6$ (*) thì $g(x) \ne 0, \ \forall x \le 2$

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(\sqrt{2x-4}+3\right) = 3$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} = \dfrac{3}{6-m}$

Hàm số liên tục tại $x=2 \Leftrightarrow \dfrac{3}{6-m} = 3 \Leftrightarrow m = 5$ (thỏa (*))

Vậy $m=5$ là những giá trị cần tìm.

Vấn đề 3. Chứng minh phương trình có nghiệm

Phương pháp :

- Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và có hai số $a, b \in D$ sao cho $f(a).f(b) < 0$.
- Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có k nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng rời nhau $(a_i;a_{i+1})$ (i=1,2,…,k) nằm trong D sao cho $f(a_i).f(a_{i+1}) < 0$.

Các ví dụ

Ví dụ 1 Chứng minh rằng các phương trình sau có đúng một nghiệm.

1. $x^5+3x+1=0$ **2.** $x^3+2x = 4+3\sqrt{3-2x}$

Lời giải.

1. Xét hàm số $f(x)=x^5+3x+1$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$

Mặt khác: $f(-1)=-1, f(0)=1 \Rightarrow f(-1).f(0) = -1 < 0$

Nên phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $\left(-1;0\right)$.

Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1, x_2.

Khi đó: $f(x_1)-f(x_2)=0 \Leftrightarrow \left(x_1^5-x_2^5\right)+3\left(x_1-x_2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x_1-x_2\right)\underbrace{\left(x_1^4+x_1^3x_2+x_1^2x_2^2+x_1x_2^3+x_2^4+3\right)}_{A}=0 \quad (1)$

Do $A = \left(x_1^2+\dfrac{1}{2}x_1x_2\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}x_1x_2+x_2^2\right)^2 + \dfrac{1}{2}x_1^2x_2^2+3 > 0$

Nên $(1) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Vậy phương trình luôn có đúng một nghiệm.

2. Điều kiện: $x \le \dfrac{3}{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow x^3+2x-3\sqrt{3-2x}-4=0$

Xét hàm số $f(x)=x^3+2x-3\sqrt{3-2x}-4$ liên tục trên $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right]$

$f(0) = -4 - 3\sqrt{3} < 0,\ f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{19}{8} > 0 \Rightarrow f(0).f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$

Nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm

Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2

Khi đó: $f(x_1) - f(x_2) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x_1^3 - x_2^3\right) + 2\left(x_1 - x_2\right) - 3\left(\sqrt{3 - 2x_1} - \sqrt{3 - 2x_2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x_1 - x_2\right)\underbrace{\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2 + \frac{6}{\sqrt{3 - 2x_1} + \sqrt{3 - 2x_2}}\right)}_{B} = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$

(Vì $B = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3x_2^2}{4} + 2 + \frac{6}{\sqrt{3 - 2x_1} + \sqrt{3 - 2x_2}} > 0$)

Vậy phương trình luôn có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 2 Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất một nghiệm :

1. $x^7 + 3x^5 - 1 = 0$ **2.** $x^2 \sin x + x\cos x + 1 = 0$

Lời giải.

1. Ta có hàm số $f(x) = x^7 + 3x^5 - 1$ liên tục trên R và $f(0).f(1) = -3 < 0$

Suy ra phương trinh $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;1)$.

2. Ta có hàm số $f(x) = x^2 \sin x + x\cos x + 1$ liên tục trên R và $f(0).f(\pi) = -\pi < 0$. Suy ra phương trinh $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;\pi)$.

Ví dụ 3. $\sqrt{x^5 + 2x^3 + 15x^2 + 14x + 2} = 3x^2 + x + 1$ có đúng 5 nghiệm phân biệt

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$x^5 + 2x^3 + 15x^2 + 14x + 2 = \left(3x^2 + x + 1\right)^2$

$\Leftrightarrow x^5 - 9x^4 - 4x^3 + 18x^2 + 12x + 1 = 0 \quad (1)$

Hàm số $f(x) = x^5 - 9x^4 - 4x^3 + 18x^2 + 12x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f(-2) = -95 < 0, f(-1) = 1 > 0, f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{19}{32} < 0$

$f(0) = 1 > 0, f(2) = -47 < 0, f(10) = 7921 > 0$

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 5 nghiệm thuộc các khoảng

$\left(-2;-1\right),\ \left(-1;-\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2};0\right),\ \left(0;2\right),\ \left(2;10\right)$

Mặt khác $f(x)$ là đa thức bậc 5 nên có tối đa 5 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Chứng minh rằng phương trình sau có đúng ba nghiệm phân biệt

1. $x^3 - 3x + 1 = 0$ **2.** $2x + 6\sqrt[3]{1 - x} = 3$

Bài 2 Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của m, n

1. $m\left(x - 1\right)^3\left(x + 2\right) + 2x + 3 = 0$ **2.** $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = m$

3. $m(x-a)(x-c)+n(x-b)(x-d)=0$ **(** $a\le b\le c\le d$ **).**

Bài 3 Cho $m>0$ và a,b,c là ba số thực bất kỳ thoả mãn

$\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

Bài 4. Chứng minh rằng phương trình :

1. $x^4+x^3-3x^2+x+1=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$

2. $x^5-5x^3+4x-1=0$ có năm nghiệm thuộc khoảng $(-2;3)$

3. $a(x-b)(x-c)+b(x-c)(x-a)+c(x-a)(x-b)=0$; $a,b,c>0$ có hai nghiệm phân biệt.

4. $(1-m^2)x^5-3x-1=0$ luôn có nghiệm với mọi m

5. $m^2.(x-2)+m(x-1)^3.(x-2)^4+3x-4=0$ có nghiệm với mọi m.

Bài 5 . Cho các số thực dương m,n,p thỏa mãn: $n<m;\ mp<n^2$ và $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}=0$. Chứng minh rằng phương trình : $f(x)=ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

Bài 6.

1. Cho hàm số $f:[0;1]\to[0;1]$ liên tục.Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một số thực $c\in[0;1]$ sao cho $f(c)=c$.

2. Cho hàm số $f:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ liên tục và $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=L<1$ Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một số $c\ge 0$ sao cho $f(c)=c$.

3. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục tại $x=0$ thỏa: $f(3x)=f(x)$.

4. Cho hàm số $f:[0;1]\to[0;1]$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa $f(0)=f(1)$.

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì phương trình $f(x)-f(x+\frac{1}{n})=0$ luôn có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$.

Bài 7.

1. Cho hàm số f liên tục trên đoạn [a ;b] và n điểm $x_1;x_2;...;x_n\in[a;b]$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm $c\in[a;b]$ sao cho $nf(c)=f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)$.

2. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất các số $0<\alpha<\beta<1$ sao cho

$$\cos\alpha=\alpha^2 \text{ và } \beta\tan\beta=1.$$

Bài 1

1. Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+1$, ta có hàm số liên tục trên R và

$f(-2)=-1$; $f(0)=1$; $f(1)=-1$; $f(2)=3$

$\Rightarrow f(-2).f(0)=-1<0, f(0).f(1)=-1<0, f(1).f(2)=-3<0$

Suy ra phương trình có ba nghiệm phân biệt thuộc các khoảng $(-2;0),(0;1),(1;2)$.

Mà f(x) là đa thức bậc ba nên f(x) chỉ có tối đa 3 nghiệm

Vậy phương trình đã cho có đúng ba nghiệm.

2. Phương trình $\Leftrightarrow 2x-3=6\sqrt[3]{x-1}\Leftrightarrow(2x-3)^3-216(x-1)=0$

Xét hàm số $f(x)=(2x-3)^3-216(x-1)$, ta có hàm số liên tục trên R và

$f(-4)=-251, f(0)=189, f(1)=-1, f(7)=35$

Suy ra $\Rightarrow f(-4).f(0)<0, f(0).f(1)<0, f(1).f(7)<0$

Suy ra phương trình có ba nghiệm phân biệt thuộc các khoảng $(-4;0),(0;1),(1;7)$.

Mà f(x) là đa thức bậc ba nên f(x) chỉ có tối đa 3 nghiệm

Vậy phương trình đã cho có đúng ba nghiệm.

Bài 2

1. Ta có hàm số $f(x)=m(x-1)^3(x+2)+2x+3$ liên tục trên R và

$f(1).f(-2)=-5<0\Rightarrow$ phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2;1)$

2. Điều kiện : $x\neq k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

Xét hàm số $f(x)=\sin x-\cos x-m\sin x\cos x$,liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và

$f(0).f(\frac{\pi}{2})=-1<0$ do đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm

$x_0\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow x_0\neq k\frac{\pi}{2}$

Do đó phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm.

3. Hàm số $f(x)=m(x-a)(x-c)+n(x-b)(x-d)$ liên tục trên R và

$f(a).f(c)=n^2(a-b)(a-d)(c-b)(c-d)\leq 0\Rightarrow$ phuowngt rình đã cho có ít nhất một nghiệm.

Bài 3 Đặt $f(x)=ax^2+bx+c$

- $c=0\Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm $x=0$
- $c\neq 0$ ta có $f(0)=c;f\left(\frac{m+1}{m+2}\right)=\frac{-c}{m(m+2)}$

$\Rightarrow f(0).f\left(\frac{m+1}{m+2}\right)=\frac{-c^2}{m(m+2)}<0$, suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm.

Bài 4. Gọi $f(x)$ là vế trái của các phương trình

1. Ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1).f(-1)=-3<0$

Nên phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;1)$.

2. Ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-2)f(-\frac{3}{2})<0;$

$f(-\frac{3}{2})f(-1)<0;f(-1).f(\frac{1}{2})<0;f(\frac{1}{2})f(1)<0;f(1)f(3)<0$

Nên ta có điều phải chứng minh.

3. Ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$f(a)f(b)f(c)=-abc\left[(a-b)(b-c)(c-a)\right]^2<0$

Nên ta có điều phải chứng minh.

4. Ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x).\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<0$

Nên ta có điều phải chứng minh.

5. Ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1).f(2)<0$

Nên ta có điều phải chứng minh.

Bài 5 Ta xét $f(\frac{n}{m})=a\frac{n^2}{m^2}+b\frac{n}{m}+c$.

Mặt khác từ : $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}=0\Rightarrow\frac{m}{n^2}\left(a.\frac{n^2}{m^2}+b\frac{n}{m}+c\right)+c(\frac{1}{p}-\frac{m}{n^2})=0$

$\Leftrightarrow\frac{m}{n^2}f(\frac{n}{m})+c.\frac{n^2-pm}{pn^2}=0\Leftrightarrow f(\frac{n}{m})=\frac{pm-n^2}{pm}c=\frac{pm-n^2}{pm}f(0)$

* Xét $c=0$

Nếu $a=0\Rightarrow b=0\Rightarrow f(x)$ là đa thức không, do đó $f(x)$ sẽ có nghiệm trong $(0;1)$

Nếu $a \neq 0$, từ giả thiết $\Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{n}{m} < 1$ và $f(x) = x(ax+b) = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} \in (0;1)$

* Xét $c \neq 0$, ta có: $f\left(\frac{n}{m}\right).f(0) = \frac{pm - n^2}{pm} f^2(0) < 0 \Rightarrow f(x)$ có nghiệm $x \in (0;\frac{n}{m}) \subset (0;1)$.

Bài 6.

1. Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$,ta có $y = g(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $g(0)g(1) < 0$ nên tồn tại $c \in [0;1] : g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$.

2. • Nếu $f(0) = 0$ thì ta chọn $c = 0$.

• Nếu $f(0) > 0$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$, ta có hàm g liên tục trên $[0;+\infty)$ và $g(0) > 0$

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = L < 1$ nên tồn tại số $a > 0$ sao cho $\frac{f(a)}{a} < 1 \Rightarrow g(a) < 0$

$\Rightarrow g(0).g(a) < 0$ nên tồn tại số thực $c \in (0;a)$ sao cho $g(c) = 0$

Hay là $f(c) = c$.

3. Ta có: $f(x) = f\left(\frac{x}{3}\right) = f\left(\frac{x}{3^2}\right) = ... = f\left(\frac{x}{3^n}\right)$

Cho $n \to \infty \Rightarrow \frac{x}{3^n} \to 0, \ \forall x$

Suy ra: $f(x) = f(0) = a, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy f là hàm hằng.

4. Xét hàm số $g(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$, ta có g là hàm liên tục trên $\left[0;\frac{n-1}{n}\right]$

Và $\sum\limits_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] = f(1) - f(0) = 0$

Suy ra tồn tại hai chỉ số $i, j \in \{0,1,...,n-1\}$ sao cho : $g\left(\frac{i}{n}\right).g\left(\frac{j}{n}\right) < 0$

Hay phương trình : $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - f(x + \frac{1}{n}) = 0$ có nghiệm trên $[0;1]$.

Bài 7.

1. Xét hàm số : $g(x) = nf(x) - f(x_1) - f(x_2) - ... - f(x_n)$ liên tục trên [a ;b].

Vì f liên tục trên đoạn [a ;b] nên tồn tại giá trị lớn nhất M, nhỏ nhất m do đó tồn tại $\alpha, \beta \in [a,b]$ sao cho $f(\alpha) = m, f(\beta) = M \Rightarrow g(\alpha).g(\beta) < 0$.

2. Hàm số : $f(x) = \cos x - x^2$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0).f(1) = 1(\cos 1 - 1) < 0$

Suy ra $\exists \alpha \in (0;1) : f(\alpha) = 0$ hay $\cos\alpha = \alpha^2$

Mặt khác hàm số $y = \cos x$ là hàm nghịch biến trên $(0;1)$, hàm $y = x^2$ là hàm đồng biến trên $(0;1)$ nên α là số duy nhất.

Hàm số $g(x) = x\tan x - 1$ liên tục trên $(0;1)$ và $f(0).f(1) = -1(\tan 1 - 1) < 0$, đồng thời hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0;1)$ nên tồn tại duy nhất số thực $\beta \in (0;1)$ sao cho $\beta\tan\beta - 1 = 0$.

Vì $\sin x < x \ \ \forall x > 0$ nên $g(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\alpha} - 1 < 0 = f(\beta) \Rightarrow \alpha < \beta$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

HAØM SOÁ LIEÂN TUÏC

Câu 1. Điều kiện: $\begin{cases}3-x\ge 0\\ x+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-4\\ x\le -3\end{cases}\xrightarrow{TXD} D=(-4;3]\longrightarrow$ hàm số liên tục trên $(-4;3)$. Xét tại $x=3$, ta có

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\left(\sqrt{3-x}+\frac{1}{\sqrt{x+4}}\right)=\frac{1}{\sqrt{7}}=f(3)\longrightarrow \text{Hàm số liên tục trái tại } x=3.$$

Vậy hàm số liên tục trên $(-4;3]$. **Chọn C.**

Câu 2. Vì $2\sin x+3\neq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}\xrightarrow{TXD} D=\mathbb{R}\longrightarrow$ Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn D.

Câu 3. Vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên suy ra

$$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)=-1.$$ **Chọn D.**

Câu 4. Vì $f(x)$ liên tục trên $[-3;3]$ nên suy ra

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$ **Chọn B.**

Câu 5. Vì $f(x)$ liên tục trên $(-4;+\infty)$ nên suy ra

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+4}+2\right)=4.$$ **Chọn C.**

Câu 6. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$, chứa $x=2$. Theo giả thiết thì ta phải có

$$m=f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+1)=3.$$ **Chọn D.**

Câu 7. Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$. Theo giả thiết ta phải có

$$3+m=f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+2)=3\Leftrightarrow m=0.$$ **Chọn A.**

Câu 8. Hàm số $f(x)$ có TXĐ: $D=[0;+\infty)$. Điều kiện bài toán tương đương với

Ta có: $k+1=y(1)=\lim_{x\to 1} y=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=-\frac{1}{2}$. **Chọn C.**

Câu 9. Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $(-1;+\infty)$. Theo giả thiết ta phải có

$$m=f(3)=\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3}=-\lim_{x\to 3}\left(\sqrt{x+1}+2\right)=-4.$$

Chọn B.

Câu 10. Với mọi $x\neq 0$ ta có

$$0 \le \left| f(x) \right| = \left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| \le x^2 \to 0 \text{ khi } x \to 0 \longrightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Theo giải thiết ta phải có: $m = f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. **Chọn C.**

Câu 11. Tập xác định:

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{3\pi}{2} + k\pi \right) = \cdots \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \right) \cup \cdots$$

Ta có $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} . \frac{1}{\cos x} = 1 . \frac{1}{\cos 0} = 1 \ne 0 = f(0) \longrightarrow f(x)$ không liên tục tại $x = 0$. **Chọn A.**

Câu 12. Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Điều kiện bài toán tương đương với

$$\begin{aligned} m = f(1) &= \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{\sin(\pi x - \pi + \pi)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{-\sin \pi (x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \left[(-\pi) . \frac{\sin \pi (x - 1)}{\pi (x - 1)} \right] \ (*). \end{aligned}$$

Đặt $t = \pi(x - 1)$ thì $t \to 0$ khi $x \to 1$. Do đó (*) trở thành:

$$m = \lim_{t \to 0} (-\pi) . \frac{\sin t}{t} = -\pi. \text{ Chọn A.}$$

Câu 13. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điều kiện củz bài toán trở thành:

$$m = f(\pi) = \lim_{x \to \pi} f(x) = \lim_{x \to \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2} = \lim_{x \to \pi} \frac{2\cos^2 \frac{x}{2}}{(x - \pi)^2} = \lim_{x \to \pi} \frac{2\sin^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right)}{(x - \pi)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to \pi} \left[\frac{\sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right)}{\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right)} \right]^2 \ (*)$$

Đặt $t = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \to 0$ khi $x \to 1$. Khi đó (*) trở thành: $m = \frac{1}{2} \lim\limits_{t \to 0} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 = \frac{1}{2} . 1^2 = \frac{1}{2}$.

Chọn C.

Câu 14. Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; -1), (-1; 0)$ và $(0; +\infty)$.

(i) Xét tại $x = -1$, ta có

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^4 + x}{x^2 + x} = \lim_{x \to -1} \frac{x(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x(x + 1)} = \lim_{x \to -1} (x^2 - x + 1) = 3 = f(-1).$$

$\longrightarrow$ hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = -1$.

(ii) Xét tại $x = 0$, ta có

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^4 + x}{x^2 + x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x(x + 1)} = \lim_{x \to 0} (x^2 - x + 1) = 1 = f(0).$$

$\longrightarrow$ hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Chọn B.

Câu 15. Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Hàm số $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ và $(1;+\infty)$.

(i) Xét tại $x=-1$, ta có $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{2}=f(-1)\longrightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=-1$.

(ii) Xét tại $x=1$, ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{x-1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{x-1}=-\infty\end{cases}\longrightarrow$ Hàm số $y=f(x)$ gián đoạn tại $x=1$. **Chọn B.**

Câu 16. TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. Hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;2)$; $(2;+\infty)$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=2$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=f(2).$ (*)

Ta có $\begin{cases}f(2)=4m^2\\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left[(1-m)x\right]=2(1-m)\\ \lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-} m^2x^2=4m^2\end{cases}\longrightarrow(*)\Leftrightarrow 4m^2=2(1-m)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Chọn A.

Câu 17. Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(0;4)$ và $(4;6)$. Khi đó hàm số liên tục trên đoạn $[0;6]$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=4,\ x=0,\ x=6$.

Tức là ta cần có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)\\ \lim\limits_{x\to6^-} f(x)=f(6)\\ \lim\limits_{x\to4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to4^+} f(x)=f(4)\end{cases}$. (*)

- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}=0\\ f(0)=\sqrt{0}=0\end{cases}$;
- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to6^-}(1+m)=1+m\\ f(6)=1+m\end{cases}$;
- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to4^-}\sqrt{x}=2\\ \lim\limits_{x\to4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to4^+}(1+m)=1+m;\\ f(4)=1+m\end{cases}$

Khi đó $(*)$ trở thành $1+m=2 \Leftrightarrow m=1<2.$ **Chọn A.**

Câu 18. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. Khi đó hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi nó liê tục tại $x=1,$ tức là ta cần có

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1). \quad (*)$$

Ta có $f(x)=\begin{cases} x-2 & \text{khi } x>1 \\ a & \text{khi } x=1 \\ 2-x & \text{khi } x<1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2-x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)=-1 \end{cases} \longrightarrow (*)$ không tỏa mãn với mọi $a\in\mathbb{R}.$ Vậy không tồn tại giá trị a thỏa yêu cầu. **Chọn C.**

Câu 19. Hàm số xác định và liên tục trên $[0;1)$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1). \quad (*)$

Ta có $\begin{cases} f(1)=a \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left[(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)\right]=4 \end{cases} \longrightarrow (*) \Leftrightarrow a=4.$ **Chọn A.**

Câu 20. Dễ thấy hàm số liên tục trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(1)=-2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-2x)=-2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left[-\left(\sqrt{2-x}+1\right)\right]=-2 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=1.$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}.$ **Chọn D.**

Câu 21. Điều kiện bài toán trở thành: $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3). \quad (*)$

Ta có $\begin{cases} f(3)=1-3a^2 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x-3}-x}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{4x-3}+x\right)}{1-x}=-3 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(1-a^2x\right)=1-3a^3. \end{cases}$

$\longrightarrow (*) \Leftrightarrow a=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}} \longrightarrow a_{\min}=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}.$ **Chọn A.**

Câu 22. Ta cần có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2). \quad (*)$

Ta có $\begin{cases} f(2)=2a^2-\dfrac{7}{4} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}=\dfrac{1}{4} \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(a^2x+\dfrac{1}{4}\right)=2a^2-\dfrac{7}{4} \end{cases} \longrightarrow (*) \Leftrightarrow a=\pm 1 \longrightarrow a_{\max}=1.$ **Chọn C.**

Câu 23. Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Mặt khác $\begin{cases} f(0)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-\cos x)=1-\cos 0=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x+1}=\sqrt{0+1}=1 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x=0$.

Chọn C.

Câu 24. Ta có $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$, $(1;+\infty)$.

- Ta có $\begin{cases} f(-1)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x-1)=-2 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x=-1$. **Chọn A.**

- Ta có $\begin{cases} f(1)=\cos\dfrac{\pi}{2}=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\cos\dfrac{\pi x}{2}=0 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Câu 25. Dễ thấy tại điểm có hoành độ $x=1$ đồ thị của hàm số bị " đứt " nên hàm số không liên tục tại đó.

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0\neq 3=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ nên $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$. **Chọn B.**

Câu 26. Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(0;1)$ và $(1;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Ta có $\begin{cases} f(1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 1^-} x=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x}=1 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Vậy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. **Chọn A.**

Câu 27. Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;1),(1;3)$ và $(3;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(1)=4 \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

Ta có $\begin{cases} f(3)=2 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 3^-}(x+1)=4 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x=3$.

Chọn D.

Câu 28. Hàm số $y=h(x)$ có TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=h(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(0;2)$ và $(2;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} h(0)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x=0 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ không liên tục tại $x=0$.

Ta có $\begin{cases} h(2)=5 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+1)=5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(3x-1)=5 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=2$.

Chọn A.

Câu 29. Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Điều kiện bài toán trở thành $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$. $(*)$

Ta có $\begin{cases} f(1)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(m^2x+1)=m^2+1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+x)=2 \end{cases} \longrightarrow (*) \Leftrightarrow m^2+1=2$

$\Leftrightarrow m=\pm 1 \longrightarrow S=0$. **Chọn B.**

Câu 30. Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(0;1)$ và $(1;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x\cos x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{1+x}=0 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Ta có $\begin{cases} f(1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{1+x}=\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^3=1 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ không liên tục tại $x=1$.

Chọn C.

Câu 31. (i) Hàm $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R} \longrightarrow$ A đúng.

(ii) Ta có $\begin{cases} f(-1)=-1<0 \\ f(-2)=23>0 \end{cases} \longrightarrow f(x)=0$ có nghiệm x_1 trên $(-2;1)$, mà

$$(-2;-1)\subset(-2;0)\subset(-\infty;1) \longrightarrow \text{ B sai và C đúng } \longrightarrow \textbf{ Chọn B.}$$

(iii) Ta có $\begin{cases} f(0)=-1<0 \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}>0 \end{cases} \longrightarrow f(x)=0$ có nghiệm x_2 thuộc $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. Kết hợp với (1) suy ra $f(x)=0$ có các nghiệm x_1, x_2 thỏa: $-3<x_1<-1<0<x_2<\dfrac{1}{2} \longrightarrow$ D đúng.

Câu 32. Hàm số $f(x)=2x^4-5x^2+x+1$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có

(i) $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(-1)=-3 \end{cases} \Rightarrow f(-1).f(0)<0 \longrightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm x_1 thuộc $(-1;0)$.

(ii) $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=-1 \end{cases} \Rightarrow f(0).f(1)<0 \longrightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm x_2 thuộc $(0;1)$.

(iii) $\begin{cases} f(1)=-1 \\ f(2)=15 \end{cases} \Rightarrow f(1).f(2)<0 \longrightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm x_3 thuộc $(1;2)$.

Vậy phương trình $f(x)=0$ đã cho có các nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa

$$-1<x_1<0<x_2<1<x_3<2 \longrightarrow \textbf{ Chọn D.}$$

Câu 33. Hàm số $f(x)=x^3-3x-1$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-2;-1)$, $(-1;0)$, $(0;2)$.

Ta có

- $\begin{cases} f(-2)=-3 \\ f(-1)=1 \end{cases} \Rightarrow f(-2)f(-1)<0 \longrightarrow (1)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2;-1)$.
- $\begin{cases} f(-1)=1 \\ f(0)=-1 \end{cases} \Rightarrow f(-1)f(0)<0 \longrightarrow (1)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;0)$.

- $\begin{cases} f(2)=1 \\ f(0)=-1 \end{cases} \Rightarrow f(2)f(0)<0 \longrightarrow (1)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;2)$.

Như vậy phương trình (1) có ít nhất ba thuộc khoảng $(-2;2)$. Tuy nhiên phương trình $f(x)=0$ là phương trình bậc ba có nhiều nhất ba nghiệm. Vậy phương trình $f(x)=0$ có đúng nghiệm trên $\mathbb{R}$. Chọn D.

Cách CASIO. (i) Chọn MODE 7 (chức năng TABLE) và nhập: $F(X)=X^3-3X-1$.

(ii) Ấn "=" và tiếp tục nhập: **Start** $\leftrightarrow -5$ (có thể chọn số nhỏ hơn).

End $\leftrightarrow 5$ (có thể chọn số lớn hơn).

Step $\leftrightarrow 1$ (có thể nhỏ hơn, ví dụ $\frac{1}{2}$).

(iii) Ấn "=" ta được bảng sau:

Bên cột X ta cần chọn hai giá trị a và b $(a<b)$ sao cho tương ứng bên cột $F(X)$ nhận các giá trị trái dấu, khi đó phương trình có nghiệm $(a;b)$. Có bao nhiêu cặp số a, b như thế sao cho khác khoảng $(a;b)$ rời nhau thì phương trình $f(x)=0$ có bấy nhiêu nghiệm.

Câu 34. Ta có $f(x)=5 \Leftrightarrow f(x)-5=0$. Đặt $g(x)=f(x)-5$. Khi đó

$$\begin{cases} g(-1)=f(-1)-5=2-5=-3 \\ g(4)=f(4)-5=7-5=2 \end{cases} \Rightarrow g(-1)g(4)<0.$$

Vậy phương trình $g(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;4)$ hay phương trình $f(x)=5$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;4)$. **Chọn B.**

Câu 35. Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2+(2m-2)x+m-3$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

● Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1<-1<x_2<x_3$. Khi đó $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Ta có $f(-1)=(-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)>0$ (do $x_1<-1<x_2<x_3$).

Mà $f(-1)=-m-5$ nên suy ra $-m-5>0 \Leftrightarrow m<-5$.

● Thử lại: Với $m<-5$, ta có

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ nên tồn tại $a<-1$ sao cho $f(a)<0$. (1)
- Do $m<-5$ nên $f(-1)=-m-5>0$. (2)
- $f(0)=m-3<0$. (3)

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên tồn tại $b>0$ sao cho $f(b)>0$. (4)

Từ (1) và (2), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-\infty;-1)$; Từ (2) và (3), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$; Từ (3) và (4), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(0;+\infty)$.

Vậy khi $m<-5$ thỏa mãn $\xrightarrow[m\in(-10;10)]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-9;-8;-7;-6\}$. **Chọn C.**